

Mitteilung.

Das nächste (letzte) Heft dieses Bandes, das in etwa 4 Wochen erscheint, wird neben dem Autorenregister zu Band 5 auch ein Sachregister für die Bände 1 bis 5 enthalten. Diese Einrichtung wird fortgesetzt.

Von Band 6 an wird der Umfang des Mathematischen Zentralblattes dadurch um etwa 10% entlastet werden, daß die Referate über alle Anwendungen der klassischen Mechanik und Thermodynamik in einem besonderen „Zentralblatt für Mechanik“ zusammengefaßt werden, das den Anwendungsgebieten der Mechanik und Thermodynamik in erhöhtem Maß gerecht werden kann. Selbstverständlich werden die rein mathematischen Zweige der Mechanik (analytische Mechanik) auch in Hinkunft im Zentralblatt für Mathematik voll berücksichtigt werden.

Die Schriftleitung.

Algebra und Zahlentheorie.

Smohorshevsky, A.: Sur les matrices unitaires du type de circulants. J. Cycle math. 2, 89—90 u. franz. Zusammenfassung 91 (1932) [Ukrainisch].

Pogrebissky, I. B.: Nouvelle démonstration du théorème: les racines d'une équation algébrique sont les fonctions continues de ses coefficients. J. Cycle math. 2, 87 (1932) [Ukrainisch].

Garver, Raymond: Concerning two square root methods. Bull. Calcutta Math. Soc. 24, 99—102 (1932).

Cesàro, G.: Sur une équation à coefficients entiers dont π est très approximativement la racine. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. s. 17, H. 3, 9—13 (1932).

L'équation dont il s'agit est $x^6 + x^5 - x^4 = 1170$.

Auszug.

Takahashi, Shin-ichi: On the system of linear forms. Jap. J. Math. 9, 19—26 (1932).

Aus einigen Sätzen von Furtwängler-Fujiwara und Schoenberg werden durch elementare Schlüsse analoge Sätze hergeleitet. Es werden hauptsächlich notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben, damit n homogene Linearformen y_i in n Veränderlichen x_k vorgegebene Bedingungen über die Vorzeichen von x_i und y_k ($1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq n$) erfüllen.

J. F. Koksma (Hilversum).

Longhi, Ambrogio: Sui gruppi ciclici di terzo ordine per una corrispondenza simmetrica, non singolare, data sopra un ente algebrico ∞^1 di genere qualunque. Boll. Un. Mat. Ital. 11, 269—273 (1932).

Levi, Friedrich, und B. L. van der Waerden: Über eine besondere Klasse von Gruppen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 9, 154—158 (1932).

W. Burnside hat zuerst die Gruppen von n Erzeugenden betrachtet, die durch die Relationen $s^m = 1$ (s ein beliebiges Gruppenelement, m eine feste ganze Zahl) definiert sind, und ihre Endlichkeit in den (nicht mehr trivialen) Fällen $m = 3$ und $n = 2, m = 4$ nachgewiesen [Quart. J. Math., Oxford Ser. 33, 230—238 (1902)]. Verff. untersuchen (für beliebiges n) den Fall $m = 3$; die Ordnung der betreffenden

Gruppen \mathfrak{A}_n wird zu $3 \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ bestimmt; sie besitzen Abelsche Kommutatorgruppen \mathfrak{R}_n ; der Kommutator zweier Elemente, von denen eines in \mathfrak{R}_n liegt, gehört zum Zentrum \mathfrak{Z}_n , das für $n > 2$ von solchen Kommutatoren erzeugt wird. \mathfrak{R}_n und \mathfrak{Z}_n sind die einzigen eigentlichen charakteristischen Untergruppen von \mathfrak{A}_n ; zum Beweis hierfür

wird gezeigt, daß der Raum der alternierenden Tensoren m -ter Stufe in einem Körper mit einer Charakteristik $\neq 2$ keinen echten invarianten Teilraum gegenüber einer gewissen Gruppe von $2^n n!$ linearen Transformationen besitzt. *Magnus* (Frankfurt a. M.).

Fitting, Hans: Die Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nicht kommutativen Gruppen. Math. Ann. 107, 514–542 (1932).

Diese Arbeit bringt eine Neubegründung und Verallgemeinerung der Theorie hyperkomplexer Systeme, welche darauf beruht, daß ein solches System einerseits in bekannter Weise als verallgemeinerte Abelsche Gruppe (mit sich selbst als Operatorenbereich), andererseits — falls eine Eins existiert — als Automorphismenring dieser Gruppe aufgefaßt werden kann. — Zugrunde gelegt wird eine beliebige, evtl. auch nicht-Abelsche Gruppe \mathfrak{G} mit Operatoren, in welcher der Doppelkettensatz für Normalteiler gilt, also eine Hauptreihe existiert. Als Automorphismen werden alle operatorhomomorphen Abbildungen $A \rightarrow A\theta$ von \mathfrak{G} auf sich betrachtet, welche mit den „inneren Automorphismen“ $A \rightarrow B^{-1}AB$ vertauschbar sind. Definiert man nun Summe und Produkt von Automorphismen durch $A(\theta + \Pi) = A\theta \cdot A\Pi$, $A(\theta \cdot \Pi) = (A\theta)\Pi$, so bilden die Automorphismen einer Abelschen Gruppe einen Ring, die einer nicht-Abelschen Gruppe aber einen „Bereich“, in welchem das Produkt immer, die Summe nur unter gewissen, axiomatisch näher festgelegten Bedingungen existiert, und in welchem sonst die üblichen Ringeigenschaften erfüllt sind. Die Untersuchung dieser Automorphismenbereiche ist das Ziel der Arbeit. — Zu jedem Automorphismus θ gehört eine Zerlegung der Gruppe \mathfrak{G} in zwei direkte Faktoren \mathfrak{G}^* und \mathfrak{G}^{**} , von denen \mathfrak{G}^* durch θ treu auf sich abgebildet wird, während \mathfrak{G}^{**} durch eine Potenz θ^n in die Eins übergeführt wird. Ist \mathfrak{G}^* die ganze Gruppe \mathfrak{G} , so ist θ eine Einheit („eigentlicher Automorphismus“); sonst ist θ ein Nullteiler, im Fall $\mathfrak{G}^{**} = \mathfrak{G}$ sogar nilpotent. θ ist dann und nur dann idempotent, wenn θ in \mathfrak{G}^* den identischen, in \mathfrak{G}^{**} den Nullautomorphismus induziert. Als Verallgemeinerung eines Satzes von Levitzki wird bewiesen: Jede multiplikativ abgeschlossene, aus lauter Nilpotenten bestehende Menge von Automorphismen ist nilpotent, d. h. das Produkt von je n Elementen der Menge ist Null. — Die Automorphismen θ , welche \mathfrak{G} in sein Zentrum \mathfrak{Z} abbilden, sind zu allen Automorphismen addierbar und bilden einen Ring; den Kern des Automorphismenbereichs \mathfrak{A} . Nachdem die Begriffe Linksideal, Rechtsideal, direkte Idealsumme auf Bereiche übertragen sind, wird der zentrale Satz der Arbeit bewiesen: Jede direkte Produktzerlegung

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \cdots \times \mathfrak{G}_r, \quad (1)$$

führt zu zwei direkten Summenzerlegungen von \mathfrak{A} in Links- und Rechtsideale:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}H_1 + \cdots + \mathfrak{A}H_r = H_1\mathfrak{A} + \cdots + H_r\mathfrak{A}, \quad (2)$$

wobei \mathfrak{G}_ν der (idempotente) Automorphismus ist, welcher jedem Element A aus \mathfrak{G} seine \mathfrak{G}_ν -Komponente zuordnet. Umgekehrt führt jede direkte Zerlegung von \mathfrak{A} in Rechts- oder Linksideale, wobei $1 = H_1 + \cdots + H_r$ die Zerlegung der Identität ist, zu einer direkten Produktzerlegung (1) mit $\mathfrak{G}_\nu = \mathfrak{G}H_\nu$. Das Ideal $\mathfrak{A}H_\nu$ ist dann und nur dann zweiseitig, wenn \mathfrak{G}_ν bei allen Automorphismen in sich transformiert wird. Ist \mathfrak{G} direkt unzerlegbar, so ist \mathfrak{A} es auch, und zwar besteht \mathfrak{A} nur aus Einheiten und nilpotenten (uneigentlichen) Automorphismen. \mathfrak{A} ist in diesem Fall vollständig primär, d. h. jedes Ideal $\neq \mathfrak{A}$ ist nilpotent. — Die beiden Zerlegungen (2) haben eine gemeinsame Verfeinerung $\mathfrak{A} = \sum \sum H_{\mu\nu} \mathfrak{A}H_\nu = \sum \sum \mathfrak{A}_{\mu\nu}$, welche für jeden Automorphismus θ eine Zerlegung $\theta = \sum \sum \theta_{\mu\nu}$ ergibt, wo $\theta_{\mu\nu}$ ein $\mathfrak{G}_\mu \mathfrak{G}_\nu$ -Automorphismus ist, d. h. ein solcher, der \mathfrak{G}_μ in \mathfrak{G}_ν und die übrigen \mathfrak{G}_λ ($\lambda \neq \mu$) auf Eins abbildet. Jedem θ ist also eine Matrix $(\theta_{\mu\nu})$ von beliebigen $\mathfrak{G}_\mu \mathfrak{G}_\nu$ -Automorphismen zugeordnet, wobei dem Produkt das Matrixprodukt entspricht. Werden die \mathfrak{G}_μ in (1) als direkt-unzerlegbar angenommen, so wird gezeigt: Diejenigen Automorphismen $\Gamma = \sum \sum \Gamma_{\mu\nu}$, bei denen die $\Gamma_{\mu\nu}$ uneigentliche $\mathfrak{G}_\mu \mathfrak{G}_\nu$ -Automorphismen sind, bilden ein nilpotentes zweiseitiges Ideal: das Radikal \mathfrak{C} von \mathfrak{A} . Ist \mathfrak{K} der Kern von \mathfrak{G} , so läßt sich die Struktur von $\mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ vollständig angeben: Es sei

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{G}_1) \times \cdots \times (\mathfrak{G}_s) \times (\mathfrak{G}_{s+1} \times \cdots \times \mathfrak{G}_{s+t_1}) \times (\cdots) \times \cdots$$

die Zerlegung von \mathfrak{G} , wobei $\mathfrak{G}_1, \dots, \mathfrak{G}_s$ nicht-Abelsch, die übrigen Abelsch und die \mathfrak{G}_ν in einer Klammer alle untereinander zentralisomorph sind. Es sei $\mathfrak{A}^{(n)}$ der Automorphismenbereich von \mathfrak{G}_ν , $\mathfrak{C}^{(n)}$ dessen Radikal, $\mathfrak{K}^{(n)}$ der Kern dieses Radikals. Dann ist $\mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ direkte Summe:

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{K} = \overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{A}}H_1 + \cdots + \overline{\mathfrak{A}}H_s + \overline{\mathfrak{A}}(\overline{H}_{s+1} + \cdots + \overline{H}_{s+t_1}) + \overline{\mathfrak{A}}(\cdots) + \cdots,$$

wobei $\overline{\mathfrak{A}}H_1$ (und entsprechend $\overline{\mathfrak{A}}H_2, \dots, \overline{\mathfrak{A}}H_s$) ein aus lauter Einheiten bestehender, zu $\mathfrak{A}^{(1)}/\mathfrak{K}^{(1)}$ isomorpher Bereich ist, während $\overline{\mathfrak{A}}(\overline{H}_{s+1} + \cdots + \overline{H}_{s+t_1})$ isomorph dem vollen Matrixring über einem Körper $\mathfrak{A}^{(s+1)}/\mathfrak{K}^{(s+1)}$ ist. Insbesondere ist im Abelschen Fall der Restklassenring $\mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ direkte Summe von vollen Matrixringen. Ist \mathfrak{G} vollst. reduzibel, d. h. alle \mathfrak{G}_ν einfach, so besteht \mathfrak{C} nur aus der Null. Schließlich wird noch der Fall diskutiert, daß alle Gruppen \mathfrak{G}_ν untereinander zentralisomorph sind. Der Automorphismenbereich ist in diesem Fall primär und voller Matrixring über einem vollständig primären Bereich. *van der Waerden*.

Akizuki, Yasuo: Bemerkungen über die Existenz des Einheitslements in Ringbereichen. Jap. J. Math. 9, 87—102 (1932).

Die Arbeit behandelt zunächst maximale zweiseitige Ideale \mathfrak{A} in einem Ring \mathfrak{R} mit Doppelkettensatz für Rechtsideale; insbesondere erweist sich der Durchschnitt dieser Ideale als das Radikal. Besondere Bedeutung gewinnen diejenigen dieser \mathfrak{A} , für die der Restklassenring nach \mathfrak{A} idempotent ist. Falls \mathfrak{R} idempotent und überdies mit jedem solchen speziellen \mathfrak{A} vertauschbar ist, hat \mathfrak{R} ein Einheitselement. (Die Herleitung dieses Satzes aus Hilfssatz 1 ist allerdings falsch; man braucht einen schärferen Hilfssatz, für den der Beweis des Hilfssatzes 1 zum Glück gültig bleibt.) Der weitere Inhalt der Arbeit erscheint Ref. nicht gesichert, u. a. weil die Schlußweise S. 95, Z. 7—8, offenbar die nicht bewiesene Gültigkeit der Minimalbedingung für \mathfrak{R}_0 (nicht \mathfrak{R}) benutzt. Die Ergebnisse würden darin bestehen, daß im Falle der Vertauschbarkeit von \mathfrak{R} mit jedem zweiseitigen Ideal folgende Sätze gelten: Ist \mathfrak{R} nicht nilpotent, so ist \mathfrak{R} direkte Summe eines Ringes mit Einheitselement und eines nilpotenten Ringes, der in Wegfall kommt, wenn \mathfrak{R} keinen rechten oder linken Totalnullteiler hat; dann und nur dann, wenn alle maximalen zweiseitigen Ideale untereinander vertauschbar sind, ist das Nullideal Durchschnitt von „Primäridealen“, die nicht mit Hilfe von Primidealen, sondern mittels der maximalen zweiseitigen Ideale erklärt werden. — Es folgen einige Sätze ähnlicher Art unter der schwächeren Voraussetzung des Doppelkettensatzes für die Restklassenringe nach den vom Nullideal verschiedenen zweiseitigen Idealen oder des Teilerkettensatzes.

W. Weber (Göttingen).

Carlitz, Leonard: On polynomials in a Galois field. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 736—744 (1932).

Mit A, E, \dots werden normierte Polynome $x^\nu + \dots + a_\nu$ über einem $GF(p^n)$ bezeichnet; $\tau^{(\alpha)}(E)$ bezeichnet die Anzahl der Teiler von E vom Grade ν . Setzt man weiter $|A| = p^{n\nu}$, wo ν der Grad von A ist, und

$$\zeta(s) = \sum_E |E|^{-s}; \quad \sigma_t(E) = \sum_{A|E} |A|^t,$$

so wird mit Hilfe eines Analogons einer Formel von Ramanujan

$$\sum \frac{\sigma_t(E) \sigma_n(E)}{|E|^s} = \frac{\zeta(s) \zeta(s-t) \zeta(s-u) \zeta(s-t-u)}{\zeta(2s-t-u)} \quad (1)$$

die Formel

$$\sum \tau^{(\alpha)}(E) \tau^{(\beta)}(E) = (\alpha + 1) p^{n\nu} - \alpha p^{n(\nu-1)}$$

(Summation über alle Polynome vom Grade ν) bewiesen. Analoge Formeln für gewisse Summen $\sum \sigma_t(E) \sigma_n(E)$ werden aus (1) hergeleitet. Sodann werden für die Anzahlen der Systeme A_1, \dots, A_k von Polynomen gegebener Grade $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, welche der Bedingung $(A_1, \dots, A_k, M) = 1$ oder $(A_1, \dots, A_k) = 1$ genügen, explizite Formeln aufgestellt; ebenso für Systeme von quadratfreien Polynomen A_1, \dots, A_k , welche übrigens denselben Bedingungen genügen. Schließlich werden das Produkt und das k. g. V. aller Polynome vom Grad ν angegeben sowie das Produkt aller der Polynome vom Grad ν , welche keine q -te Potenz enthalten.

van der Waerden (Leipzig).

Perron, Oskar: Quadratische Zahlkörper mit Euklidischem Algorithmus. Math. Ann. 107, 489—495 (1932).

Die Frage, in welchen quadratischen Zahlkörpern der Euklidische Algorithmus gilt, d. h. sich zu jeder Zahl δ des Körpers eine ganze Zahl γ des Körpers so bestimmen läßt, daß $|\text{Nm}(\delta - \gamma)| < 1$ ist, wurde gelegentlich von Dickson aufgeworfen, aber falsch beantwortet. Perron zeigt, daß unter den Körpern mit negativer Diskriminante D die den Werten $D = -1, -2, -3, -7, -11$ entsprechenden und nur diese die genannte Eigenschaft haben. Im Falle $D > 0$ gelingt es verhältnismäßig leicht, auf Grund eines einzigen Hilfssatzes zu zeigen, daß die Körper mit $D = 2, 3, 5, 6, 7, 13, 17, 21, 29$ die genannte Eigenschaft haben. Den Fall $D = 11$ erledigt Perron ebenfalls in bejahendem Sinne; der Beweis wird aber viel schwieriger. Unter diesen Umständen

erscheint Perron die Bestimmung aller fraglichen Zahlen D zur Zeit aussichtslos. Möglicherweise existiere der Euklidische Algorithmus sogar in jedem quadratischen Körper mit positiver Diskriminante und der Klassenzahl 1. *Bessel-Hagen* (Bonn).

Wegner, U.: Ein Satz über die Zerlegung von Primzahlen bestimmter arithmetischer Progressionen in algebraischen Zahlkörpern. J. reine angew. Math. **168**, 231—232 (1932).

Beweis der beiden Sätze: „ $P(\vartheta)$ sei ein beliebiger algebraischer Zahlkörper vom Primzahlgrade p über dem Körper der rationalen Zahlen. Es gibt unendlich viele (rationale) Primzahlen der Form $px + 1$, die in $P(\vartheta)$ selbst Primideale (also solche vom Grade p) sind“ und „ $P(\vartheta)$ sei ein beliebiger algebraischer Zahlkörper vom Grade n über P und p eine beliebig vorgegebene Primzahl. q sei eine in n aufgehende und zu $p - 1$ teilerfremde Primzahl. Es gibt unendlich viele (rationale) Primzahlen der Form $px + 1$, die in $P(\vartheta)$ durch mindestens ein Primideal q -ten Grades teilbar sind.“

Bessel-Hagen (Bonn).

Iyanaga, S.: Über den Wertvorrat des Normenrestsymbols. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **9**, 159—165 (1932).

Ist K ein relativ Abelscher Oberkörper des algebraischen Zahlkörpers k , so ist der Wertvorrat des Hasseschen Normenrestsymbols $\left(\frac{\alpha, K}{p}\right)$ bekanntlich die Zerlegungsgruppe von p , wenn α alle Zahlen $\neq 0$ von k durchläuft. Beschränkt man sich auf zu p prime α , so gilt zunächst: ist α Normenrest mod des p -Führers p^v der K in k zugeordneten Idealgruppe H , so ist $\left(\frac{\alpha, K}{p}\right) = 1$. In Verallgemeinerung dieses Satzes beweist Verf.: der Wertvorrat des Symbols $\left(\frac{\alpha, K}{p}\right)$ ergibt nacheinander alle Verzweigungsgruppen von p , wenn α die Gruppen der Normenreste mod p^a , ($a = 1, \dots, v$), durchläuft. Das wichtigste Hilfsmittel für den Beweis ist ein Satz von Hasse über die Führer der Verzweigungskörper (J. reine angew. Math. **162**, 170), welcher auch eine explizite Darstellung der den Verzweigungskörpern zugeordneten Idealgruppen liefert: bezeichnen wir mit V_ν den $(\nu + 1)$ -mal bzw. ν -mal überstrichenen Verzweigungskörper, je nachdem der einmal überstrichene mit dem Trägheitskörper zusammenfällt oder nicht, mit p^{a_ν} den p -Führer von V_ν , mit $S(m)$ den Strahl mod m , so ist die V_ν zugeordnete Idealgruppe $H(V_\nu) = HS(p^{a_\nu} \cdot f/p^\nu)$, $a_\nu \leq a < a_{\nu+1}$. Mit Hilfe dieser Relation wird dann gezeigt, daß $\left(\frac{\alpha, K}{p}\right)$ die ν -te Verzweigungsgruppe als Wertvorrat besitzt, wenn α den Strahlen mod p^a , $a_\nu \leq a < a_{\nu+1}$, entnommen ist. *Taussky*.

Bussi, Carlo: Sull'ultimo teorema di Fermat. Boll. Un. Mat. Ital. **11**, 267—269 (1932).

Bohr, H., and B. Jessen: On more proof of Kronecker's theorem. J. London Math. Soc. **7**, 274—275 (1932).

Considérons la fonction:

$$F(t) = 1 + e^{2\pi i(\lambda_1 t - \varphi_1)} + \dots + e^{2\pi i(\lambda_N t - \varphi_N)}$$

$$(\lambda_1 \dots \lambda_N \text{ réels linéairement indépendants; } \varphi_1 \dots \varphi_N \text{ réels})$$

la conclusion de Kronecker est équivalente à:

$$\text{borne sup } F(t) = 1 + N. \quad (1)$$

Posant

$$k_n(t) = \sum_{-n}^{+n} \left(1 - \frac{|v|}{n}\right) e^{i v t} (\geq 0), \text{ puis } K_n(t) = k_n\{2\pi(\lambda_1 t - \varphi_1)\} \dots k_n\{2\pi(\lambda_N t - \varphi_N)\}$$

ce résultat est obtenu en remarquant que: $1 + \frac{n-1}{n} N = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) K_n(t) dt$.

Une modification simple à la méthode permet de prouver que (1) a également lieu lorsqu'on considère seulement les valeurs entières de t . *J. Favard* (Grenoble).

Bohr, Harald, und Børge Jessen: Deux nouvelles démonstrations simples du théorème de Kronecker. Mat. Tidsskr. B H. 3/4, 53—58 (1932) [Dänisch].

La première démonstration n'est pas différente de celle exposée ci-dessus. La deuxième est conduite ainsi qu'il suit: Lorsque t diffère d'un multiple de 2π de plus de $2\pi\varepsilon$ ($0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$) on a:

$$k_n(t) \leq \frac{1}{n} \frac{1}{(\sin \pi \varepsilon)^2},$$

ε étant choisi, ainsi que h ($< \frac{1}{N}$), pourvu que n soit suffisamment grand, on aura donc, dans ces conditions: $k_n(t) \leq h$. Si le th. de K. était faux, relativement à ε , on aurait quelque soit t :

$$K_n(t) \leq h \sum_{\nu=1}^N \frac{K_n(t)}{k_n[2\pi(\lambda_\nu t - \varphi_\nu)]}$$

en passant aux valeurs moyennes, on en déduirait $1 \leq hN$, c.-à.-d. une contradiction.

J. Favard (Grenoble).

Jessen, Børge: Eine Integrationstheorie für Funktionen unendlich vieler Veränderungen, mit Anwendung auf das Werteverteilungsproblem für fastperiodische Funktionen, insbesondere für die Riemannsche Zetafunktion. Mat. Tidsskr. B H. 3/4, 59—65 (1932).

L'auteur expose sans démonstration les résultats les plus saillants relatifs à deux théories qui lui doivent des contributions importantes: La première est une théorie de la mesure, et par suite de l'intégration, dans l'ensemble fermé $H\{f(s)\}$ défini par une fonction $f(s)$ p. p. de la variable complexe $s = \sigma + it$ (c.-à.-d. dans l'ensemble des fonctions $f(s + ih)$ (h réel) et de leurs limites de convergence uniforme dans la bande de presque-périodicité de $f(s)$). D'ailleurs ce problème n'est envisagé que dans des cas particuliers mais les résultats obtenus sont fort intéressants, ainsi: Les fonctions:

$$\zeta(s; x_1, x_2, \dots) = \prod_1^\infty \frac{1}{(1 - e^{2\pi i x_n p_n^{-s}})}$$

p. p. dans $\sigma > 1$ sont presque toutes régulières et différentes de zéro dans $\sigma > \frac{1}{2}$. La deuxième question est celle de la répartition des points où une fonction p. p. prend une valeur donnée a dans une bande contenue dans la bande de presque-périodicité; en désignant par $N_a(T)$ le nombre de ces points dont l'ordonnée est en module inférieure à T (> 0), on démontre, dans les cas particuliers envisagés, l'existence de:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_a(T)}{2T} = G_a$$

et on exprime G_a au moyen d'une intégrale effectuée selon la théorie précédente. — Une extension de la méthode permet d'obtenir une interprétation intéressante de la proposition de Bohr-Landau, savoir que, dans la bande $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, les zéros de $\zeta(s)$, s'il y en a, sont relativement rares.

J. Favard (Grenoble).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

● **Hahn, Hans: Reelle Funktionen. Tl. 1. Punktfunktionen.** (Mathematik u. ihre Anwendungen in Monogr. u. Lehrbüchern. Begr. v. E. Hilb. Hrsg. v. E. Artin u. G. Kowalewski. Bd. 13.) Leipzig: Akad. Verlagsges. m. b. H. 1932. XI, 415 S. RM. 30.—

Eine außerordentlich vollständige Darstellung von allgemeinen Eigenschaften der reellen Funktionen und Abbildungen in metrischen Räumen. Die daran anschließenden Fragen der abstrakten und topologischen Mengenlehre sind ebenfalls ausführlich behandelt. Die Theorie der Mengenfunktionen (insbesondere Integrationstheorie) sollen den Stoff des zweiten Bandes bilden. Spezielle Eigenschaften von Funktionen in Euklidischen Räumen bleiben außer Betracht. Das so begrenzte Gebiet wird in erschöpfender Weise dargestellt; man findet auch die neuesten Resultate. Nur in an-betracht dieser enzyklopädieartigen Darstellung sei erwähnt, daß die Hausdorffschen

δ -Operationen, die Lusinschen projektiven Mengen und die unlängst von Banach und Kuratowski entwickelte allgemeine Theorie der Borelschen Abbildungen metrischer Räume nicht aufgenommen sind. Die Darstellung ist sorgfältig in ungefähr anderthalbtausend Sätze eingeteilt; jeder Beweis ist dabei kurz aber klar gefaßt; um das Verständnis dem Leser zu erleichtern, ist ein Verzeichnis der gebrauchten Bezeichnungen (ungefähr 250) beigelegt. Die genauere Einteilung des Stoffes ist die folgende: Kap. I. Grundbegriffe der allgemeinen Mengenlehre. Kap. II. Punktmengen. Kap. III. Der Begriff der Stetigkeit (halbstetige und stetige Abbildungen, stetige und unstetige Funktionen, konvergente Funktionenfolgen, gleichmäßige und stetige Konvergenz, kompakte Funktionenmengen). Kap. IV. Borelsche Mengen und Borelsche Funktionen (auch Spezielleres über halbstetige Funktionen und Funktionen erster, zweiter und dritter Klasse). Kap. V. Die analytischen Mengen (Eigenschaften analytischer Mengen, implizite Funktionen, Lusinsche Siebe). *A. Kolmogoroff (Moskau).*

Myrberg, P. J.: Bemerkung zur Theorie des transfiniten Durchmessers einer ebenen Punktmenge. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A 33, Nr 7, 1—4 (1931).

Wenn zwei von Myrberg und Ahlfors herrührende Sätze auf die Theorie des transfiniten Durchmessers angewandt werden, folgt sofort: Damit der transfinite Durchmesser einer ebenen Punktmenge E verschwinde, ist notwendig, daß alle Maße positiver Dimension gleich Null sind, hinreichend, daß das logarithmische Maß verschwindet. *Ahlfors.*

Cavaillès, J.: Sur la deuxième définition des ensembles finis donnée par Dedekind. Fundam. Math. 19, 143—148 (1932).

The definition in question is: A set S is finite if it admits an application on itself such that no true part of S is applied to itself. On the basis of an unpublished memoir by Dedekind to appear in the third volume of his complete works the author establishes the following propositions. Every subset of a finite set is finite. If A is finite, so is $A + b$. If there is a class K such that 1) there is an element s of a finite set S with the property $(s) \in K$ and 2) $B + (s) \in K$ when $B \in K$ and $s \in S$, then $S \in K$. The class of subsets of a finite set S is finite. If a set S is finite it is impossible to apply S biunivocally on one of its true subsets. He remarks that the reciprocal of this last proposition which is needed to demonstrate the equivalence of the two definitions apparently cannot be established without the help of the sequence of integers as was also stated by Dedekind. *E. W. Chittenden (Iowa).*

Sierpiński, W.: Sur les rapports entre les classifications des ensembles de MM. F. Hausdorff et Ch. de la Vallée Poussin. Fundam. Math. 19, 257—264 (1932).

Let K be an arbitrary set of elements and let F be a given family of subsets of K with the following two properties: 1) the sum of any finite number of sets of F belongs to F , and 2) the product of an enumerable infinity of sets of F belongs to F . Set $Q' = F$, and denote by P' the family of all the sets which are complementary with respect to the set K to sets of the family F , and define for the ordinal numbers $\alpha < \Omega$, families of sets P^α and Q^α by transfinite induction as follows. The family P^α will contain all sets which are sums of an enumerable infinity of sets belonging to families Q^β defined for indices $\beta < \alpha$, and Q^α will be the family of sets which are the products of enumerable infinities of sets belonging to families P^β ($\beta < \alpha$). In addition, let $L^0 = F$ and define L^α as the family of all sets which are the unique limits of infinite sequences of sets belonging to families L^β where $\beta < \alpha$. The following relations are established: $L^{2n} = Q^{2n+1}$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$; (2) $L^{2n-1} = P^{2n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$; and $L^\alpha = P^{\alpha+1} Q^{\alpha+1}$, $\omega \leq \alpha < \Omega$. *E. W. Chittenden (Iowa).*

Sierpiński, W.: Sur une propriété de suites d'ensembles fermés. Mém. Soc. Roy. sci. Bohême 1931, Nr 31, 1—2 (1932).

Es seien $E \subset H$ zwei Punktmengen im R^n . Wenn E (bzw. H) eine F_σ (bzw. $F_{\sigma\delta}$) Menge ist, so existiert eine Folge von abgeschlossenen Mengen $F_1, F_2, \dots, F_m, \dots$ mit $\lim F_m = E$ und $\lim F_m = H$. *A. Kolmogoroff (Moskau).*

Sierpiński, Waclaw: Sur une propriété caractéristique de fonctions de Baire à valeurs distinctes. Publ. math. Univ. Belgrade **1**, 170—171 (1932).

This note contains a demonstration of the following reciprocal of a theorem of Lusin: a function of a real variable with distinct values (that is, $f(x') \neq f(x)$ if $x' \neq x$) which transforms every closed interval into a Borel measurable set is a function of Baire.

E. W. Chittenden (Iowa).

Sierpiński, Waclaw: Sur une propriété de fonctions de deux variables réelles, continues par rapport à chacune de variables. Publ. math. Univ. Belgrade **1**, 125—128 (1932).

This note contains the following theorem and its demonstration. A function of two real variables, continuous with respect to each variable separately, is determined when its values are known on an arbitrary set dense in the plane. The author remarks that this theorem can be easily deduced from a proposition of Baire from which it results that if a function $f(x, y)$ is continuous with respect to each of the variables separately there exists on every segment parallel to the axis OX or the axis OY a point where the function $f(x, y)$ is continuous with respect to the pair of values (x, y) .

E. W. Chittenden (Iowa).

Jurek, Bohuš: Sur la dérivabilité des fonctions discontinues. Mém. Soc. Roy. sci. Bohême **1931**, Nr 27, 1—21 (1932).

Verf. stellt sich die Frage, ob man aus der Kenntnis der Unstetigkeiten einer Funktion $f(x)$ etwas über ihre Differenzierbarkeit schließen könnte. Aus den Sätzen dieser Art seien hier nur die folgenden erwähnt: Wenn die Menge der Unstetigkeitspunkte von $f(x)$ eine in sich dichte Menge enthält, so existiert eine perfekte Menge, auf welcher $f(x)$ nicht differenzierbar ist. Umgekehrt, wenn eine Menge M keine in sich dichte Untermenge enthält (also separiert ist), so gibt es eine Funktion $f(x)$, welche in jedem Punkte von M unstetig und in jedem M nicht angehörenden Punkte differenzierbar ist; diese Funktion $f(x)$ könnte man dabei monoton wählen. Weitere Resultate von analoger Art sind mit dem Begriffe der Hausdorffschen Dimension und mit zwei neuen Begriffen der Quasistetigkeit und der Quasidifferenzierbarkeit verbunden.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Burkill, J. C., and U. S. Haslam-Jones: Notes on the differentiability of functions of two variables. J. London Math. Soc. **7**, 297—305 (1932).

In the first place this note contains corrections to the demonstration of a theorem concerning total differentiability of a real function of two real variables given by Stepanoff in Rec. math. Soc. math. Moscou **32**, 511—526 (1924). Then there is shown that functions $f(x, y)$ which are of bounded variation according to the definition of Arzela, are totally differentiable almost everywhere. Definition: „For $f(x, y)$ defined in a square $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$, $V_x(x_0, y_0)$ denote the variation of $f(x, y_0)$, as a function of x in the interval $0 \leq x \leq x_0$. Then $f(x, y)$ is said to be of bounded variation (T) if: α) $V_x(x, y)$ and $V_y(x, y)$ are measurable functions of (x, y) ; β) $V_x(1, y)$ and $V_y(x, 1)$ are finite for almost all y and x respectively; γ) $\int_0^1 V_x(1, y) dy$ and $\int_0^1 V_y(x, 1) dx$ exist and are finite.“ The authors show in the last part of their note that such a function is approximately totally differentiable almost everywhere in the square. *J. Ridder.*

Saks, S.: On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions. Fundam. Math. **19**, 211—219 (1932).

The author considers the space C of functions continuous on $(0, 1)$. He designates as Weierstrass's functions (W) continuous functions with no unique derivative (finite or infinite) at any point, and as Besicovitch's functions (B) those which at no point have one-sided derivative (finite or infinite). While it is known that the complement of W is of the first category in C , the author shows in the first part of the paper that the complement of B is of the second category. In the second part of the paper

the more precise result is established: with exception of a set of the first category in C every continuous function has a right-hand derivative $+\infty$ on a non-denumerable set of points. The arguments used in the first part are comparatively elementary, while those of the second part are based on properties of analytic sets and on the recent work of Tarski and Kuratowski. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Romanovski, Paul: *Essai d'une exposition de l'intégrale de Denjoy sans nombres transfinis.* Fundam. Math. **19**, 38—44 (1932).

Let P be any perfect set, α, β its extreme points and (α_i, β_i) its continuous intervals. If $F(x)$ is continuous then $\Delta_P F = F(\beta) - F(\alpha) - \sum_i [F(\beta_i) - F(\alpha_i)]$ is designated as the variation of $F(x)$ over P . The author develops the theory of Denjoy integrals on the basis of the following definition: $f(x)$ which is defined almost everywhere on (a, b) is Denjoy integrable on (a, b) if there exists at least one continuous function $F(x)$ such that each perfect set $P \subset (a, b)$ contains a portion P' for every sub-portion P'' of which we have $\Delta_{P''} F = \int_{P''} f(x) dx$. He uses a lemma on families of intervals

which allows to avoid the usage of transfinite numbers. According to author's statement analogous results have been obtained previously by Saks (Fundam. Math. **13**, **15** and the monograph Zarys teorji calki, 1930). *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Burkill, J. C.: *The Cesàro-Perron integral.* Proc. London Math. Soc., II. s. **34**, 314—322 (1932).

Definitions: 1. Writing $C(f, a, b)$ for $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$, where the integral is a (special) Denjoy integral, the function $f(x)$ is \bar{C} -continuous (Cesàro-continuous) at x_0 , if $C(f, x_0, x_0 + h)$ tends to $f(x_0)$ as h tends to zero. 2. $CD^* f(x)$, the upper Cesàro derivate of $f(x)$ for a given value of x , will be equal to

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{Cf(x, x+h) - f(x)}{\frac{1}{2}h}.$$

The lower C -derivate, $CD_* f(x)$, has a corresponding definition. 3. $f(x)$ being measurable and finite almost everywhere in (a, b) , $M(x)$ is a major-function of $f(x)$ in (a, b) if: $\alpha)$ $M(x)$ is C -continuous in (a, b) ; $\beta)$ $M(a) = 0$; $\gamma)$ for all x in $a \leq x \leq b$:

$$CD_* M(x) > -\infty \text{ and } \geq f(x).$$

Introducing these major-functions and corresponding minor-functions in the definition of the Perron-integral, the author obtains an integral which he calls the Cesàro-Perron integral. It is shown that this integral possesses the ordinary properties. [cf. Burkill, Math. Z. **34**, 270—278 (1931); this Zbl. **2**, 386, 387.] *J. Ridder* (Groningen).

Analysis.

Labocetta, Letterio: *Riduzione a tipi normali ed effettiva integrazione delle funzioni discontinue.* Boll. Un. Mat. Ital. **11**, 278—282 (1932).

Chaundy, T. W.: *Analytic implicit functions of a real variable.* J. London Math. Soc. **7**, 276—280 (1932).

The author regards Lagrange's expansion of $f(y)$, where $y = a + x\Phi(y)$, as a special case of a more general theorem relating to implicit functions. Assuming the conditions of the ordinary theory of implicit functions, i. e., $f(x_0, y_0) = 0$ and $f_y(x, y) \neq 0$, throughout some region, $|x - x_0|, |y - y_0| < \delta$, he proves that the function $y(x)$, defined implicitly by the equation $f(x, y) = 0$, is analytic throughout some region $|x - x_0| < \delta$. His method of proof consists in establishing the inequality $|D^n y| < n! A_1 B_1^n$, by means of the assumptions:

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0, \quad \left| \frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q} \right| < p! q! A B^p C^q.$$

The extension of the theorem to n variables is indicated. *H. T. Davis* (Bloomington).

Caccioppoli, R.: Sull'approssimazione per polinomi delle funzioni definite in campi illimitati. Giorn. Ist. Ital. Attuari 3, 364—375 (1932).

The paper is concerned with the approximation to a given function $f(x)$, defined over the interval $(-\infty, +\infty)$, by means of polynomials $P(x)$ determined so that

$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) |f(x) - P(x)|^p dx < \varepsilon$, where $p > 1$, $\theta(x)$ is a weight function, and $f(x)$ is such that $\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) |f(x)|^p dx$ converges. Two sufficient conditions on the weight function are given, and the results are extended to cover the case of functions of several independent variables.

I. S. Sokolnikoff (Madison).

Miranda, Carlo: Approssimazione di una funzione armonica di tre variabili, mediante polinomi armonici. Rend. Circ. mat. Palermo 56, 239—244 (1932).

Beweis für die Tatsache, daß eine in einem dreidimensionalen offenen Gebiet T mit dem Rand S harmonische Funktion in $T + S$ gleichmäßig durch harmonische Polynome approximiert werden kann; dabei müssen über S einige einschränkende Voraussetzungen gemacht werden. Daraus ergibt sich die Approximierbarkeit einer beliebigen Funktion durch harmonische Polynome.

Rellich (Göttingen).

Pólya, G.: Über einen Satz von Myrberg. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 42, 159 (1932). Vgl. dies. Zbl. 5, 18.

Watanabe, Yoshikatsu: Über die Äquivalenz der Cesàroschen und der Hölderschen Mittel für Integrale bei negativer Ordnung. Jap. J. Math. 9, 67—86 (1932).

Die Definition der Cesàroschen und Hölderschen Mittel für Integrale wird auf negative Ordnungen ausgedehnt, und die Äquivalenz der Mittel bei gleicher Ordnung bewiesen. [Für positive Ordnungen vgl. M. Jacob, Math. Z. 26, 672—682 (1927).]

R. Schmidt (Kiel).

Takahashi, Shin-ichi: Zum verallgemeinerten Infinitesimalkalkül der Matrizen. Jap. J. Math. 9, 27—46 (1932).

Es bedeute M das Maximum der Summen, gebildet aus den absoluten Beträgen der Zeilen einer Matrix A , und N das Maximum der analog gebildeten Summen für die Spalten derselben Matrix A . Diese Zahlen M und N besitzen die Eigenschaften eines absoluten Betrages, und es wird M (oder auch N) als der absolute Betrag der Matrix A definiert: $[A] = M$. Es seien $A(x)$ und $B(x)$ 2 Matrizen, und zwar seien die Elemente von $A(x)$ in einem endlichen Intervall (p, r) beschränkte Funktionen, und $B(x)$ sei eine Matrix, die in (p, r) der Lipschitzbedingung

$$[B(x) - B(x')] \leq K |x - x'| \quad (K = \text{Konstante})$$

genüge für $p \leq x, x' \leq r$. Verf. zeigt, daß unter diesen Voraussetzungen das Produkt — Stieltjessches Integral über die Matrix A zwischen den Grenzen p und r bei beliebiger Anfangsmatrix $y^{(0)}$ mit nicht verschwindender Determinante $|y^{(0)}|$ existiert, d. h. es existiert

$$\int_p^r (J + A) dB(x), \quad (J = \text{Einheitsmatrix})$$

was unmittelbar aus den beiden Hilfssätzen folgt: I. Wenn die Folge von Matrizen A_1, A_2, \dots gegen eine Grenzmatrix A konvergiert, so konvergiert auch die Zahlenfolge $[A_1], [A_2], \dots$ gegen $[A]$. — II. Wenn für m Matrizen A_1, A_2, \dots, A_m

$$P_m = (J + A_1)(J + A_2) \dots (J + A_m)$$

gesetzt wird, so gilt

$$[P_m] < \exp. \left(\sum_{v=1}^m [A_v] \right).$$

Verf. zeigt weiterhin, daß das Produkt — Stieltjessches Integral eine stetige Funktion der oberen Grenze ist. Ebenso ergibt sich, daß das Produkt — Stieltjesintegral an „fast allen“ Stellen differenzierbar ist, wo die Matrix $A(x)$ stetig ist. Integrations- und Abschätzungsregeln beschließen die Arbeit.

Wegner (Darmstadt).

Bourion, G.: Sur une classe de séries de Taylor. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 938 bis 941 (1932).

This note is concerned with lacunary power series and contains a number of remarks on over-convergence, not suitable for abstracting in their present form. *Hille*.

Hardy, G. H., and J. E. Littlewood: Notes on the theory of series. XVII: Some new convergence criteria for Fourier series. J. London Math. Soc. 7, 252—256 (1932).

Die Funktion $\Phi(t)$ sei integrierbar und 2π -periodisch. Nach den üblichen formalen Vereinfachungen wird $\Phi(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$. Es wird gezeigt: Wenn

$$(1) \quad \Phi(t) = o \left\{ \frac{1}{\lg \left| \frac{1}{t} \right|} \right\} \quad \text{und} \quad (2) \quad a_n = O(n^{-\delta})$$

für ein $\delta > 0$, dann ist $\sum a_n = 0$. — Diese Aussage ist in zweierlei Hinsicht eine bestmögliche: Wenn (1) aufrechterhalten wird, so läßt sich (2) durch keine Bedingung der Form $a_n = O(n^{-\eta_n})$ ($\eta_n \rightarrow 0$ mit $n \rightarrow 0$) ersetzen; ebenso läßt sich, wenn (2) aufrechterhalten wird, (1) nicht durch eine Bedingung der Form $\Phi(t) = o \left\{ \frac{\eta(t)}{\lg \left| \frac{1}{t} \right|} \right\}$

($\eta(t) \rightarrow \infty$ mit $t \rightarrow 0$) ersetzen. — Auf dem Wege über die Umkehrsätze des Borelschen Summierungsverfahrens (in der Verallgemeinerung von Valiron) gelingt es jedoch, (2) durch eine einseitige O -Bedingung zu ersetzen: Wenn $\Phi(t)$ der Bedingung (1) genügt, und $a_n > -Kn^{-\delta}$ für ein $\delta > 0$ und ein $K > 0$ ist, dann ist $\sum a_n = 0$. (XVI. vgl. dies. Zbl. 3, 112.) *R. Schmidt* (Kiel).

Martis in Biddau, Silvia: Sulla caratterizzazione della trasformazione di Laplace mediante le sue proprietà formali. Boll. Un. Mat. Ital. 11, 273—277 (1932).

Si dimostra che certi operatori lineari E , definiti dal Pincherle mediante alcune proprietà formali, sono dati tutti dalle combinazioni lineari a coefficienti costanti di trasformazioni di Laplace. *Autoreferat*.

Differentialgleichungen:

● **Ritt, Joseph Fels:** Differential equations from the algebraic standpoint. (Amer. math. soc. coll. publ., Vol. 14.) New York: Amer. math. Soc. 1932. X, 172 S.

Eine algebraische Theorie der Systeme algebraischer Differentialgleichungen (gewöhnlicher und partieller) mit dem Ziel, diese Systeme in voller Allgemeinheit ohne vorherigen Übergang zu einer Normalform, also unter Vermeidung der damit verknüpften Einschränkungen und Schwierigkeiten, zu behandeln. Als Vorbild dient die Eliminationstheorie der algebraischen Gleichungen in mehreren Unbekannten und die Theorie der algebraischen Mannigfaltigkeiten. Aus dieser algebraischen Theorie werden zahlreiche Ergebnisse auf Systeme gewöhnlicher algebraischer Differentialgleichungen und zum Teil auf Systeme partieller algebraischer Differentialgleichungen übertragen. Dabei handelt es sich jedoch keineswegs um triviale Übertragungen; vielmehr liegen die Verhältnisse bei den Differentialgleichungen im einzelnen durchaus anders, und die benutzten Methoden sind daher auch in den Einzelheiten neu. Inhaltlich ist neben der Glätte der theoretischen Resultate besonders die Ausführlichkeit hervorzuheben, mit der auf die konstruktiven Verfahren, also auf Berechnungen mit endlich vielen Schritten, eingegangen wird. Im einzelnen ist der Inhalt folgender. Unter einer Form verstehe man ein Polynom $F(x; y_1, \dots, y_n)$ in den n unbekannten Funktionen y_1, \dots, y_n der komplexen Veränderlichen x und einer gewissen Anzahl ihrer Ableitungen. Die Koeffizienten des Polynoms F sind Funktionen von x , die sämtlich in einem festen Gebiet \mathfrak{A} der komplexen Zahlenebene meromorph und alle einem gegebenen Funktionenfeld entnommen sind. Ein solches Funktionenfeld ist dabei erklärt als eine Funktionenmenge, die außer gegenüber den rationalen Rechenoperationen auch noch gegenüber der Differentiation abgeschlossen ist. Σ sei ein endliches oder unendliches System von Formen, $\Sigma = 0$ das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, das durch Nullsetzen aller Formen von Σ entsteht. Die Gesamtheit aller Lösungen von $\Sigma = 0$ bildet dann die Mannigfaltigkeit \mathfrak{M} von Σ , deren algebraische Untersuchung der Zweck der weiteren Überlegungen ist. — In Analogie mit der Theorie der algebraischen Mannigfaltigkeiten wird in Kap. I zunächst der Begriff der irreduziblen Mannigfaltigkeit eingeführt und daran anschließend der Hauptsatz der Zerlegungstheorie bewiesen:

Eine Mannigfaltigkeit \mathfrak{M} heißt irreduzibel, wenn sie sich nicht als Vereinigungsmenge zweier Mannigfaltigkeiten darstellen läßt, die beide echte Teilmengen von \mathfrak{M} sind. Jede beliebige Mannigfaltigkeit \mathfrak{M} ist gleich der Vereinigungsmenge endlich vieler irreduzibler Mannigfaltigkeiten, $\mathfrak{M} = \{\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_s\}$, und diese Darstellung ist nach Tilgung überflüssiger \mathfrak{M}_i eindeutig bestimmt. — Zum Beweis des Hauptsatzes wird die Zerlegungstheorie der Mannigfaltigkeiten mit Hilfe der nachstehenden Definitionen rein formal als Teilbarkeitstheorie der zugehörigen Systeme Σ gedeutet. a) Ein System Σ_1 mit der Mannigfaltigkeit \mathfrak{M}_1 ist „Lösungsvielfaches“ des Systems Σ_2 mit der Mannigfaltigkeit \mathfrak{M}_2 (in Zeichen $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$), wenn \mathfrak{M}_2 Teilmenge von \mathfrak{M}_1 , $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1$ ist. Aus $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$ folgt also offenbar stets $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$, während die Umkehrung hiervon im allgemeinen nicht zu gelten braucht. b) Das System Σ wird irreduzibel genannt, wenn von je zwei Formen G und H , deren Produkt Lösungsvielfaches von Σ ist, stets mindestens eine selbst Lösungsvielfaches von Σ ist. Die Mannigfaltigkeit von Σ erweist sich hiernach dann und nur dann als irreduzibel, wenn Σ irreduzibel ist. — Die Herleitung des Hauptsatzes stützt sich ferner auf ein Satzpaar, das man als Analogon zum Hilbertschen Basissatz bzw. dem damit gleichwertigen Noetherschen Teilerkettensatz anzusehen hat. Nämlich: Jedes unendliche System Σ ist mit einem geeigneten endlichen Teilsystem Σ' lösungsgleich, d. h. beide Systeme besitzen dieselbe Mannigfaltigkeit. Oder anders formuliert: In einer Kette von Systemen $\Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \dots \subset \Sigma_n \subset \dots$ sind stets fast alle Σ_n lösungsgleich; eine ins Unendliche laufende Kette von Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{M}_n \supset \dots$ existiert nicht. — Nachdem so die Grundlage für die Theorie der Mannigfaltigkeiten gewonnen ist, beschäftigen sich die weiteren Kapitel einmal mit der näheren theoretischen Untersuchung der irreduziblen Mannigfaltigkeiten, andererseits mit der Ausbildung von Rechenverfahren, die die Zerlegung einer beliebigen Mannigfaltigkeit in irreduzible und die Bildung der in der Theorie auftretenden Ausdrücke mit endlich vielen Schritten ermöglichen. — Die theoretische Untersuchung der irreduziblen Mannigfaltigkeiten beginnt mit einer formalen Frage. Im rein algebraischen Fall können bekanntlich endlich viele algebraische Funktionen stets durch eine einzige Funktion ersetzt werden, durch die sich jede der ursprünglichen Funktionen rational ausdrücken läßt, d. h. die Auflösung des Gleichungssystems, das die ursprünglichen Funktionen definiert, kann auf die Auflösung einer einzigen Gleichung, einer algebraischen Resolvente des Systems, zurückgeführt werden. Um im Fall der Differentialgleichungssysteme etwas Ähnliches zu erhalten, wird in Kap. II zunächst die allgemeine Lösung einer Einzelform A erklärt, die als Polynom in den y_i und ihren Ableitungen algebraisch unzerlegbar ist. Ist y_j ein in A wirklich auftretendes

der y_i und r die Ordnung von A bez. y_j , wird ferner $\frac{d^r y_j}{dx^r} = y_{j,r}$ gesetzt, so heiße jede Lösung von A , für die $S_{y_j} = \frac{\partial A}{\partial y_{j,r}}$ nicht verschwindet, normal bez. y_j . Σ_i sei das System aller Formen,

die durch die bez. y_j normalen Lösungen von A annulliert werden, \mathfrak{M}_i die Mannigfaltigkeit von Σ_i . Diese Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}$ ist dann irreduzibel, tritt als wesentlicher Bestandteil in der Zerlegung der Mannigfaltigkeit von A in irreduzible auf und erweist sich als unabhängig von der besonderen Wahl des y_j , mit dessen Hilfe sie definiert wurde. Sie wird die allgemeine Lösung von A genannt. Die Bestimmung einer beliebigen irreduziblen Mannigfaltigkeit kann nun ganz ähnlich wie im algebraischen Fall auf die Bestimmung der allgemeinen Lösung einer Einzelform, einer sog. Resolvente des Systems zurückgeführt werden. — Auf die Frage nach der Struktur der irreduziblen Mannigfaltigkeiten geht Kap. VI näher ein. Seine Ergebnisse lassen sich am einfachsten für den Fall der allgemeinen Lösung \mathfrak{N} einer Einzelform auseinandersetzen. Nach Definition enthält \mathfrak{N} sicher alle bez. y_j normalen Lösungen von A . Welche weiteren Lösungen von A gehören noch zu \mathfrak{N} ? Antwort: Alle bez. y_j subnormalen Lösungen von A . Dabei heißt eine Lösung $\tilde{y}_1(x), \dots, \tilde{y}_n(x)$ subnormal bez. y_j , wenn in dem Gebiet \mathfrak{N} ein Punkt a existiert, der Art, daß die $\tilde{y}_i(x)$ in a analytisch sind und daß zu gegebenen m und ε stets eine bez. y_j normale Lösung $y_1(x), \dots, y_n(x)$ gefunden werden kann, für die

$$|\tilde{y}_{i,k}(a) - y_{i,k}(a)| < \varepsilon \quad \text{ist} \quad \left(y_{i,k} = \frac{d^k y_i}{dx^k}, \quad k = 0, 1, \dots, m \right).$$

Aus der Existenz eines solchen Punktes a folgt dann übrigens sofort die Existenz einer in \mathfrak{N} dichten Menge von Punkten mit derselben Eigenschaft. Entsprechende Sätze bestehen allgemein für jede irreduzible Mannigfaltigkeit. — Hinsichtlich der Zerlegung mit endlich vielen Schritten wird folgendes geleistet: Kap. V gibt ein erstes Verfahren an, das für die Mannigfaltigkeit \mathfrak{M} eines beliebigen endlichen Systems Σ mit endlich vielen Schritten die Berechnung von „Basisformen“ für sämtlich in der Zerlegung von \mathfrak{M} auftretende irreduzible Mannigfaltigkeiten ermöglicht. Die Basisformen charakterisieren dabei die zugehörige irreduzible Mannigfaltigkeit jeweils eindeutig, ohne daß allerdings die zugehörige irreduzible Mannigfaltigkeit einfach gleich der Mannigfaltigkeit der Basisformen wäre. Dies erste Verfahren schließt insbesondere eine vollständige Eliminationstheorie der irreduziblen Mannigfaltigkeiten in sich, liefert jedoch noch nicht die irreduziblen Systeme selbst. Es wird vervollständigt durch den Nachweis, daß sich auf Grund der Kenntnis der Basisformen für jede irreduzible Mannigfaltigkeit mit endlich vielen Schritten eine Resolvente bilden läßt. — Um die irreduziblen Systeme, die in der Zerlegung von Σ auftreten, selbst zu erhalten, wird in Kap. VIII zunächst

der Hilbertsche Nullstellensatz auf Differentialgleichungssysteme übertragen: Ist $\Sigma = \{F_1, \dots, F_r\}$ ein endliches System und G eine Form, für die $G \in \Sigma$ gilt, so läßt sich eine geeignete Potenz G^m stets linear durch die F_i und ihre Ableitungen mit Formen als Koeffizienten darstellen. Auf Grund dieses Satzes wird ein Verfahren entwickelt, das hinreichend weit fortgesetzt, die Zerlegung des Systems Σ in irreduzible Systeme liefert. Leider hat dies Verfahren jedoch vorerst noch einen wesentlichen Mangel, den Verf. selbst hervorhebt und der weitere Untersuchungen notwendig macht. Es läßt sich nämlich im allgemeinen nicht angeben, „wie weit“ das Verfahren durchgeführt werden muß, um zum gewünschten Ziel zu führen. — Von den weiteren Resultaten der Monographie ist noch die Übertragung des Lürothschen Satzes aus der Theorie der unikursalen Kurven und die Aufstellung der Resultante für zwei Formen in einer unbekannten Funktion zu erwähnen, ferner die in den letzten beiden Kapiteln vorgenommene Übertragung eines großen Teils der Ergebnisse auf partielle Differentialgleichungen. *F. K. Schmidt.*

Ore, Oystein: Formale Theorie der linearen Differentialgleichungen. II. Teil. J. reine angew. Math. 168, 233—252 (1932).

Im ersten Teil dieser Arbeit (dies. Zbl. 3, 201) handelte es sich wesentlich um Folgerungen aus den Gleichungen des euklidischen Algorithmus; im vorliegenden zweiten Teil wird dagegen ein gemischtes Gleichungssystem untersucht. Es wird gezeigt, daß die Lösungen einen endlichen Modul nach dem Konstantenkörper bilden, ein Resultat, das wesentlich auf der speziellen Struktur des Ringes der Differentialpolynome beruht. Insbesondere ergibt sich so, daß der Eigenring — das System der Rechtsmultiplikatoren eines Linksideals — ein hyperkomplexes System bildet. Das zweite Kapitel bringt direkte Beweise von Zerlegungssätzen, die bei gruppentheoretischer Auffassung des Restklassenmoduls Spezialfälle von bekannten Sätzen werden. — Es sei bemerkt, daß auch die Untersuchung des gemischten Gleichungssystems bei dieser gruppentheoretischen Auffassung auf bekannte Begriffe führt: Der Eigenring besteht aus denjenigen (eentlichen und uneentlichen) Operatorautomorphismen des Restklassenmoduls, die durch Ringelemente realisierbar sind; allgemeiner ergeben die Lösungen des homogenen Gleichungssystems die durch Ringelemente realisierbaren Operatorhomomorphismen in den Restklassenmodul eines zweiten Ideals. *E. Noether (Göttingen).*

● **Kryloff, Nicolas: Les problèmes fondamentaux de la physique mathématique et de la science d'ingenieur. Charkow u. Kiew: Techn. Staatsverl. 1932. 251 S. [Ukrainisch].**

Das Buch behandelt die Randwertaufgaben der gew. lin. Differentialgl. 2. Ordn.

$$\frac{d(py')}{dx} + \lambda qy = f, \quad p > 0, \quad |q| > 0,$$

wobei den p und q außer der Stetigkeit noch geeignete Differenzierbarkeitseigenschaften auferlegt werden. Als Randbedingungen werden hauptsächlich $y(0) = y(1) = 0$ genommen, doch werden auch Sturmsche oder noch allgemeinere lin. Randbed. herangezogen. Das Ziel ist immer die Angabe von Näherungsverfahren von abschätzbarem Näherungsgrad und die Aufstellung der Fehlergrenzen mit einer für Anwendungen ausreichenden Genauigkeit. Die Konvergenz der Näherungsverfahren ergibt sich aus den Fehlerabschätzungen als Nebenresultat. Das Buch ist mit großer Gründlichkeit gearbeitet, gibt alle Entwicklungen lückenlos und bringt auch die Beweise für die theoretischen Grundtatsachen, z. B. für die Existenz des Minimums beim Ritzschen Integral. Wir beschränken uns im folgenden immer auf $p = 1$, obwohl in umfangreichen Partien (Teil 2, §§ 1—11) der allgemeine Fall in den Vordergrund gestellt wird. — Teil 1 behandelt die homogene Gleichung

$$y'' + qy = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$$

unter der Voraussetzung, daß q nur wenig um einen positiven Wert q_0 herum schwankt. Für die Eigenwerte besteht dann eine von Rayleigh herrührende bequeme Näherungsformel. Sie wird auf neuem Wege hergeleitet und mit einer Restabschätzung versehen. Diese beruht auf der Abgeschlossenheit des Systems der Eigenfunktionen, deren Beweis gegeben wird, und eine wichtige Formel für den Mindestabstand zweier Eigenw. (s. u.). (Zusammenfassung des Gedankens der Herleitung S. 84—85.) Eine zweite Methode zur angenäherten Berechnung und Abschätzung der Eigenw. erhält Kryloff in folgender Weise. Die Entwicklung des lösenden Kerns nach den Eigenf. ergibt nach 2maliger Integration in bekannter Weise:

$$\sum \frac{1}{\lambda - \lambda_n} = \frac{u'_\lambda(1, 0, \lambda)}{u(1, 0, \lambda)}, \quad \text{wo } u(x, 0, \lambda) \text{ die Lösung der Differentialgl. ist, die für } x = 0 \text{ ver-}$$

schwindet und die Ableitung 1 besitzt. Reihenentwicklung nach λ ergibt auf der linken Seite als Koeffizienten die Summen $\sum 1/\lambda_n^k$. Andererseits wird $u(x, 0, \lambda)$ für kleine λ in die Neumannsche Reihe entwickelt. Für die Koeffizienten der rechten Seite erhält man auf diese Weise bequeme Rekursionsformeln, so daß also die $\sum 1/\lambda_n^k$ rekurrend berechnet werden können.

Man erhält dann Näherungswerte für $1/\lambda_n$ nach Analogie der Methoden von Bernoulli und Graeffe. Im vorliegenden Falle geringer Schwankung von q läßt sich das Verfahren noch wesentlich verfeinern. — Der 2. Teil bezieht sich auf den allgemeinen Fall. Die ersten 11 §§ sind der Ritzschen Methode gewidmet, und zwar in Anwendung auf

- (a) inhomog. Problem $y'' - \lambda q y = f(x)$,
 (b) homog. Problem $y'' + \lambda q y = 0$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix}} \right\} y(0) = y(1) = 0, \quad q > 0.$

Als Näherungsfunktionen werden hauptsächlich trigon. Summen und den Grenzbedingungen angepaßte Potenzsummen $\sum a_i x^i (1-x)$ gewählt. Ist im Falle (a) y_m das trigon. Polyn. m -ten Gr., das das Ritzsche Integral zum Min. macht, so wird die dadurch bewirkte Näherung verglichen mit der Näherung durch das Fourier-Polynom m -ten Gr. [Resultate: Formeln (1) und (62), (63).] Asymptotisch ergibt sich bei Funktionen f mit quadratisch integrierbarer 2. Abl. eine Näherung von der Ordn. $1/m^3$. Bei der Näherung durch Potenzsummen wird verglichen mit der Näherung durch Kugelfunktionen. [Ergebnisse: Formeln (68) und (75).] Unter der gleichen Annahme wie oben ist die Näherung asymptotisch von der Ord. $1/m^2$. Die Polynomnäherungen haben außerdem den Vorteil, sich beliebig oft differenzieren zu lassen, wenn f genügend oft differenzierbar ist. Die in diesen §§ angewandten Abschätzungsmethoden sind ins Einzelne gehende Durcharbeitungen auch sonst bekannter Verfahren. — Beim Problem (b) beschränke ich mich hier auf die trigon. Näherung. Zuerst wird durch Grenzübergang nach dem Rayleighschen Prinzip die Existenz der Eigenw. und Eigenf. abgeleitet, dann als Hilfsatz durch eine geschickte Anpassung Sturmischer Methoden eine merkwürdige untere Grenze für die Differenz zweier sukzessiver Eigenw. aufgestellt, nämlich

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq \frac{2\pi^2 k}{\max q} e^{-\int_0^1 \frac{|q'|-q'}{2} dx},$$

schließlich wird mit Hilfe des Abgeschlossenheitssatzes für die Eigenf. (der nochmals auf neuem Wege bewiesen wird) der Näherungsgrad für Eigenw. und Eigenf. abgeschätzt. Es ergibt sich folgendes: Ist $\lambda_{k,m}$ der k -te Eigenw. des trigon. Minimumspolynoms (im Sinne von Ritz) m -ten Gr. ($m > k$), dann ist

$$\lambda_{k,m} - \lambda_k \leq \frac{\lambda_k \lambda_{k,m}}{(m+1)^2 \pi^2} [\max q - \sqrt{\max q \cdot \min q}].$$

Dies gilt von einem angebbaren Werte m ab. Die Konvergenz ist also ziemlich gut; bei einmal differenzierbarem q wird sogar gezeigt, daß der Fehler nur von der Ordn. $1/m^4$ ist. [Ähnliche Abschätzungen für die Fehler der Eigenf.: Formeln (249), (250); Ordn. $1/m^3$.] — In den §§ 12, 13 werden der Ritzschen Methode zwei andere zur Auflösung der inhomog. Differentialgl. an die Seite gestellt. Für $y'' + \lambda q y = f(x)$, $y(0) = y(1) = 0$ macht Verf. darauf aufmerksam, daß für $\lambda > \lambda_1$ das Ritzsche Verfahren versagt, weil das Ritzsche Integral negative Werte beliebig großen Betrags annehmen kann. Zwei Verfahren behalten aber auch in diesem Falle Gültigkeit (als Näherungsfunktionen werden trigon. Polynome genommen). Das erste, als „verallgemeinerte Fourier-Analyse“ bezeichnet, besteht in dem Ansatz

$$\int_0^1 (y_m'' + \lambda q y_m - f) \sin i\pi x dx = 0 \quad (i = 1, \dots, m),$$

(y_m das trigon. Näherungspolynom), der sich bei formaler Anwendung des Ritzschen Prinzips ergibt. — Das zweite ist die Methode der kleinsten Quadrate

$$\int_0^1 (y_m'' + \lambda q y_m - f)^2 dx = \text{Min.}$$

Für beide Verfahren läßt sich die Restabschätzung durchführen und die Konvergenz nachweisen. Der Fehler ist von der Ordn. $1/m^3$. Für die Methode der kl. Qu. wird gezeigt, daß für $q < 0$, $q^2 - |q''| > 0$ sogar die Ordn. $1/m^2$ statthat. — In §§ 14—15 wird noch die Methode der kleinsten $2p$ -ten Potenzen (Dunham Jackson) skizziert und wenigstens die theoretische Möglichkeit der Lösung des Gleichungssystems für die Konstanten nachgewiesen, und schließlich die Enskogsche Orthogonalisierungsmethode kurz besprochen. — Ein Zusatz, § 16, ist der Lösung von Systemen linearer algebraischer Gleichungen gewidmet: $l_i(x_1, \dots, x_m) = f_i$. K. empfiehlt für die praktische Lösung Umformung mittels Methode der kl. Qu. $\sum (l_i - f_i)^2 = \text{Min}$ und Anwendung des Diagonalverfahrens, für dessen Konvergenzgrad er — mit Hilfe einer Verallgemeinerung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung — eine neue Abschätzung gibt. — Die dargelegten Methoden werden an verschiedenen Beispielen erläutert, die weder trivial noch auf die Methoden zugeschnitten sind. Die Resultate sind durchweg recht befriedigend.

O. Blumenthal (Aachen).

Gevrey, Maurice: Systèmes d'équations aux dérivées partielles du type parabolique. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 690—692 (1932).

Unter einer zu einem linearen partiellen Differentialausdruck F zweiter Ordnung

in m Veränderlichen und gewissen Randbedingungen gehörenden Quasi-Greenschen Funktion versteht Verf. eine Funktion $V(P, \Pi)$, die dieselben Randbedingungen erfüllt wie die zugehörige Greensche Funktion und für $P \rightarrow \Pi$ unendlich wird wie $1: \overline{P\Pi}^{m-2}$, während $F(V)$ für $P \rightarrow \Pi$ von geringerer als der m -ten Ordnung unendlich wird. Dagegen wird (im Gegensatz zur Greenschen Funktion) nicht $F(V) = 0$ verlangt. (V ist also eine Parametrix im Hilbertschen Sinn.) In früheren Arbeiten hat Verf. für eine Reihe elliptischer bzw. parabolischer Randwertaufgaben solche Funktionen V konstruiert und mit ihrer Hilfe Integralgleichungen für die zugehörige Greensche Funktion bzw. unter Vermeidung des Umwegs über die Greensche Funktion direkt für die Lösung der betreffenden Randwertaufgabe aufgestellt. — In der vorliegenden Note behandelt nun Verf. mit der geschilderten Methode Randwertaufgaben für das parabolische System von n Gleichungen

$$\sum_{i,j}^m a_{ij}^k \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} + b_k \frac{\partial u_k}{\partial y} + \sum_{i=1}^m \sum_{h=1}^n b_{hi}^k \frac{\partial u_h}{\partial x_i} + \sum_{h=1}^n c_h^k u_h = f_k$$

$$(k = 1, 2, \dots, n; b_k < 0),$$

in denen die Koeffizienten Funktionen von x_1, \dots, x_m, y sind und die quadratische Form $\sum_{i,j}^m a_{ij}^k \alpha_i \alpha_j$ positiv definit ist. Im speziellen Fall einer Gleichung ($n = 1$) hat Verf. bereits früher [C. R. Acad. Sci., Paris **171**, 839 (1920)] eine Integralgleichung für die Greensche Funktion aufgestellt.

E. Rothe (Breslau).

Malechir, Henri: Sur les systèmes de Pfaff. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **1**, 205–210 (1932).

Der Verf. betrachtet ein System S von $r + p$ unabhängigen Pfaffschen Gleichungen $\omega_i = 0$; $\bar{\omega}_j = 0$ ($i = 1, \dots, r$; $j = 1, \dots, p$) in $n + m$ Veränderlichen x_k ; y_l ($k = 1, \dots, n$; $l = 1, \dots, m$) von der Beschaffenheit, daß die ω_i ($\bar{\omega}_j$) nur von den x_k (y_l) sowohl in den Koeffizienten als auch in den Differentialen abhängen. Mittels einfacher Schlüsse zeigt er, daß 1. die Klasse vom S der Summe der Klassen der beiden Systeme $\omega_i = 0$ und $\bar{\omega}_j = 0$ gleich ist; 2. auf jeder größten charakteristischen Mannigfaltigkeit des Systems $\omega_i = 0$ oder $\bar{\omega}_j = 0$ sich unendlich viele charakteristische Mannigfaltigkeiten des Systems S befinden; 3. das durch eine Punkttransformation, in der $r_1(p_1)$ verschiedene Integrale des charakteristischen Systems von $\omega_i = 0$ ($\bar{\omega}_j = 0$) als neue Veränderliche vorkommen, transformierte System vom S eine um wenigstens $r_1 + p_1$ verminderte Klasse hat.

O. Borůvka (Brno).

Miranda, Carlo: Il teorema di esistenza per il problema di Dirichlet in un campo piano privo di punti esterni. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. **2**, 49–52 (1932).

L'A. dimostra, con un metodo alternato, il teorema di esistenza per il problema di Dirichlet in un campo piano avente per completa frontiera un numero finito di curve semplici, aperte e limitate, a due a due senza punti comuni. Autoreferat.

Brelot, Marcel: Sur l'étude des singularités ponctuelles des fonctions sous-harmoniques. C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 852–854 (1932).

In the present note the author continues the discussion [started in the C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 693 (1932)] of the sub-harmonic functions of the form

$$u(M) = \lambda(M) \log \frac{1}{OM} \quad \text{or} \quad \lambda(M) \cdot (OM)^{-n+2},$$

according as $n = 2$ or $n > 2$. In particular, several properties are mentioned of the integral $I_\gamma = \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n} ds$, where γ is a circle about O of radius ρ . (See this Zbl. **5**, 356.)

J. D. Tamarkin (Providence).

Brelot, Marcel: Sur l'allure des fonctions sous-harmoniques au voisinage d'un point, singulier ou non. C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 932–934 (1932).

Continuation of two notes (s. the preced. note a. this Zbl. **5**, 356). Among other results the author states that the results of the preceding note concerning the

flux of a class of sub-harmonic functions, can be extended to most general sub-harmonic functions if the notion of flux is suitably interpreted. Applications to the problem of integration of $\Delta u = \varphi(M) \geq 0$, when $\varphi(M)$ is continuous for $M \neq 0$, while $\varphi(M) \cdot \overline{OM}$ is integrable. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Brelot, M.: Über die Singularitäten der Potentialfunktionen und der Integrale der Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. S.-B. Berlin. math. Ges. **31**, 46—54 (1932).

Exposé historique: 1° fonction u harmonique dans un domaine contenant O , sauf peut-être en O ; première étude par Schwarz (1872) dans le cas de deux variables, puis par Poincaré pour l'espace à trois dimensions; résultats concernant le cas où la fonction u , ou bien son produit par une puissance de la distance r à O , sont bornés; puis étude par Picard du cas où u est borné inférieurement seulement; démonstration actuelle des résultats, ainsi que de ceux qui concernent le cas où $r^k u$ est borné inférieurement, le nombre des variables étant quelconque: cette démonstration est fondée sur les travaux de Zaremba, de Lebesgue et de Bouligand; indications sur d'autres travaux. 2° Travaux concernant le cas où u est singulier sur un ensemble de points. 3° Travaux sur les équations aux dérivées partielles du type elliptique: cas d'une solution qu'on suppose régulière sauf en un point où les coefficients sont réguliers, et cas où les coefficients admettent un point singulier isolé ou un ensemble de points singuliers; ce dernier cas a été étudié dans les travaux de Bouligand et dans ceux de l'auteur, qui insiste sur la possibilité de nouvelles recherches. *Georges Giraud.*

Frazer, H.: Further inequalities concerning subharmonic functions. J. London Math. Soc. **7**, 284—290 (1932).

Neue Abschätzungen von Integralen subharmonischer Funktionen (vgl. dies. Zbl. **5**, 171). *Ahlfors* (Åbo).

Ascoli, Guido: Funzioni antiarmoniche in un dominio circolare. Boll. Un. Mat. Ital. **11**, 263—265 (1932).

Si comunicano i risultati ottenuti nella ricerca di funzioni antiarmoniche in un cerchio, cioè ortogonali ad ogni funzione sommabile, armonica entro il cerchio; e di successioni di funzioni antiarmoniche tali che ogni funzione sommabile nel cerchio e ad esse ortogonale è equivalente a una funzione armonica. *Autoreferat.*

Spezielle Funktionen:

Humbert, Pierre: Sur les fonctions de Bessel-intégrales. C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 854—855 (1932).

In this brief note the author introduces „Bessel functions-integrals“ of any order

$$Ji_n(x) = - \int_x^\infty \frac{J_n(x) dx}{x}$$

[$J_n(x)$ — Bessel coefficient of order n ; $Ji_0(x) \equiv Ji(x)$ having been previously introduced by Van der Pol, Philos. Mag. **8**, 887 (1929)]. A detailed study of these functions is promised in a more extended article. *J. Shohat* (Philadelphia).

Hamel, Georg: Berechnung des vollständigen elliptischen Integrals dritter Gattung für große Werte des Moduls. S.-B. Berlin. math. Ges. **31**, 17—22 (1932).

Während es für die praktische Berechnung der vollständigen Integrale erster und zweiter Gattung für Werte des Moduls, die nahe bei 1 liegen, gut konvergente Entwicklungen gibt, scheinen entsprechende Entwicklungen für das vollständige Integral dritter Gattung bisher in der Literatur gefehlt zu haben. Verf. gibt eine solche an. Er nimmt, etwas abweichend von Legendre, das Normalintegral dritter Gattung in der Gestalt

$$\Pi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta}{1 + \lambda^2 \sin^2 \vartheta}$$

an, die den Vorteil hat, auch noch für $k^2 = 1$ zu existieren. Weiterhin setzt er k und λ als reell und $k^2 \leq 1$ voraus. Durch Differentiation nach k^2 unter dem Integralzeichen und Partialbruchzerlegung des dann entstehenden Integranden ergibt sich für II die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial II}{\partial k^2} = \frac{1}{2(k^2 + \lambda^2)} (II - K), \quad (1)$$

in der K das Normalintegral erster Gattung

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}$$

bezeichnet. Integration der Differentialgleichung (1) ergibt die Formel

$$II = \sqrt{\lambda'^2 - k'^2} \left(\frac{\arctan \frac{\lambda}{\lambda'}}{\lambda \lambda'} + \frac{1}{2} \int_0^{k'^2} \frac{K dk'^2}{(\sqrt{\lambda'^2 - k'^2})^3} \right). \quad (k'^2 = 1 - k^2, \lambda'^2 = 1 + \lambda^2) \quad (2)$$

In diese Formel trägt nun Verf. die von früher bekannte Entwicklung von K für Werte von k^2 nahe bei 1 ein und gewinnt auf diesem Wege die gesuchte Entwicklung von II .

Bessel-Hagen (Bonn).

Bailey, W. N.: Some transformations of generalized hypergeometric series, and contour-integrals of Barnes's type. Quart. J. Math., Oxford Ser. 3, 168—182 (1932).

In continuation of the work of Thomae, Saalschütz, Dougall, Ramanujan, and Whipple, the author gives a number of transformations of generalised hypergeometric series whose argument is unity, establishing his results by contour-integration. The following is an example:

$$\begin{aligned} & {}_4F_3 \left[\begin{matrix} a, & b, & c, & d \\ \hline \kappa - b, & \kappa - c, & \kappa - d \end{matrix} ; \right] \\ &= \frac{\Gamma(\kappa - b) \Gamma(\kappa - c) \Gamma(\kappa - d) \Gamma(\kappa - b - c - d)}{\Gamma(\kappa - c - d) \Gamma(\kappa - b - d) \Gamma(\kappa - b - c) \Gamma(\kappa)} \times \\ & \quad \times {}_5F_4 \left[\begin{matrix} b, & c, & d, & \frac{1}{2}(\kappa - a), & \frac{1}{2}(1 + \kappa - a) \\ \hline \kappa - a, & \frac{1}{2}\kappa, & \frac{1}{2}(\kappa + 1), & 1 - \kappa + b + c + d \end{matrix} ; \right] + \\ & \quad + \frac{\Gamma(\kappa - b) \Gamma(\kappa - c) \Gamma(\kappa - d) \Gamma(b + c + d - \kappa) \Gamma(3\kappa - a - 2b - 2c - 2d)}{\Gamma(b) \Gamma(c) \Gamma(d) \Gamma(2\kappa - a - b - c - d) \Gamma(3\kappa - 2b - 2c - 2d)} \times \\ & \quad \times {}_5F_4 \left[\begin{matrix} \kappa - c - d, & \kappa - b - d, & \kappa - b - c, & \frac{3}{2}\kappa - \frac{1}{2}a - b - c - d, & \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\kappa - \frac{1}{2}a - b - c - d; \\ \hline 1 + \kappa - b - c - d, & 2\kappa - a - b - c - d, & \frac{3}{2}\kappa - b - c - d, & \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\kappa - b - c - d \end{matrix} \right]. \end{aligned}$$

Whittaker (Edinburgh).

Rhodes, C. E.: A geometric interpretation of Landen's transformation. Amer. Math. Monthly 39, 594—596 (1932).

Integralgleichungen und Verwandtes:

● **Stone, Marshall Harvey:** Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis. (Amer. math. soc. colloq. publ. Vol. 15.) New York: Amer. Math. Soc. 1932. VIII, 622 S. \$ 6.50.

Die von Hilbert geschaffene Theorie der bilinearen Formen von unendlich vielen unabhängigen Veränderlichen und der zugehörigen linearen Transformationen des „Hilbertschen“ Raumes hat in dem bekannten Enzyklopädieartikel von Hellinger und Toeplitz eine sicher noch für lange Zeit grundlegende Darstellung gefunden, soweit die beschränkten Formen in Frage kommen. Seit der Drucklegung jenes Artikels hat jedoch die allgemeine Theorie einen erheblichen Fortschritt gemacht, indem es — vor allem Herrn J. v. Neumann — gelang, die Hilbertschen Resultate auch auf weite Klassen nicht beschränkter Formen auszudehnen und damit wichtige Anwendungen in Analysis und Physik einzubeziehen. Das Gelingen beruht bei Neumann technisch weitgehend auf der abstrakt-symbolischen Darstellungsweise für die Formen und dem direkten Hantieren mit Operatoren statt mit der

Koordinatendarstellung durch unendlich viele Veränderliche. Inhaltlich entscheidend war die Entdeckung des Begriffes der maximalen bzw. „hypermaximalen“ Erweiterung eines zunächst nur in einem gewissen Bereiche definierten Operators. — Nun folgt hier ein recht umfassendes und durchaus selbständiges Werk von Stone, welches sich im wesentlichen die Aufgabe stellt, möglichst vollständig und übersichtlich den heutigen Stand der Theorie der nicht beschränkten Operatoren darzulegen. St. hat an der Entwicklung der Theorie selbst einen sehr bedeutenden Anteil. Unabhängig von Neumann hatte er den entscheidenden Begriff der selbstadjungierten (bei Neumann hypermaximalen) Transformationen erkannt und im Anschluß an Stieltjes-Carlemanse Gedanken die Hilbertsche Spektraltheorie auf diese Transformationen übertragen. Das vorliegende Buch ist teilweise eine Ausführung der früheren mehr skizzenhaften diesbezüglichen Publikationen des Verf., schlägt aber auch sonst in vielen Einzelheiten trotz des durchgehenden Neumannschen Einflusses eigene Wege ein. Auch St. bedient sich der abstrakten Darstellungsweise. Er entwickelt vom Begriffe des Hilbertschen Raumes beginnend, in 9 Kapiteln und ohne Voraussetzungen über beschränkte Formen, die ganze Theorie. Dabei steht naturgemäß die Spektralzerlegung der selbstadjungierten Formen im Mittelpunkt, und es wird im übrigen das Problem der Charakterisierung aller selbstadjungierter Operatoren gelöst. Ein erheblicher Teil des Werkes ist Anwendungen auf Integraltransformationen, Differentialoperatoren, Jakobische Formen, Momentenproblem usw. gewidmet. Anwendungen auf Physik sind mit Rücksicht auf die Raumbeschränkung weggeblieben. Die Schreibweise ist ausführlich, sehr sorgfältig, dabei frisch und anziehend; trotz der abstrakten Form bleibt im Grunde der Blick aufs Konkrete gerichtet. Jedoch bedingt das Streben nach Vollständigkeit naturgemäß einen etwas schleppenden Gang der Darstellung. Da die Entwicklung der Theorie noch im Fluß ist, kann St.s Werk keinen abschließenden Charakter tragen. Es wird aber zweifellos zur Verbreitung der Kenntnis dieses neuen Gebietes und zur Anregung wissenschaftlichen Fortschrittes erheblich beitragen.

R. Courant (Göttingen).

Yosida, Kôsaku: Some remarks on the theory of Fredholm's integral equations. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 14, 381—384 (1932).

Integral conditions satisfied by the kernel, $K(x, s)$, of the Fredholm equation, $\Phi(x) + \lambda \int_0^1 K(x, s) \Phi(s) ds = 0$, are stated which assure the existence of characteristic numbers. In particular, if the kernel satisfies the equation,

$$\int_0^1 \int_0^1 K(x, s) K(s, t) K(t, y) ds dt = \int_0^1 \int_0^1 K(x, s) K^*(t, s) K(t, y) ds dt,$$

where $K^*(t, s)$ is the conjugate imaginary of $K(t, s)$, then the Fredholm equation admits at least one characteristic value. This condition includes the Hilbert real symmetric kernel, the Hermitian kernel, $K(x, y) = K^*(y, x)$, and the real skew-symmetric kernel. The author shows that the characteristic values of these kernels must also be real by proving the theorem: If some of the characteristic values of $K(x, y)$ are real, then there must exist at least two Hermitian kernels, $H_1(x, y)$ and $H_2(x, y)$

such that $\int_0^1 H_1(x, s) K(s, y) ds$ and $\int_0^1 K(x, s) H_2(s, y) ds$ are Hermitian. Also, conversely, that if there exists a definite Hermitian kernel $H(x, s)$ such that $\int_0^1 H(x, s) K(s, y) ds$ is Hermitian, then the characteristic values of $K(x, y)$ must be real.

H. T. Davis (Bloomington).

Finzi, B.: Calcolo dei sistemi multipli: Derivazione unica — Funzionali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 13, 8—12 (1931).

Für die sog. „mehrfachen Systeme“ (vgl. die frühere Arbeit des Verf. dies. Zbl. 2, 29), die von anderen mehrfachen Systemen abhängen, werden weitere Definitionen eingeführt: Die „derivata unica“, „differenziale unico“, die „quadratischen Differentialformen“, die „kovarianten Ableitungen“, das „Integral“. Endlich werden auch (rein formal) mehrfache Systeme mit unendlich vielen Indizes betrachtet und auf solche Systeme die Volterraschen Begriffe der „Faltung 2. Art“ ausgedehnt.

Luigi Fantappiè (Bologna).

Drinfeld, G. I.: Sur l'abaissement de l'ordre de l'invariant intégral. J. Cycle math. 2, 83—86 (1932) [Russisch].

Differenzgleichungen:

Milne-Thomson, L. M.: On the operational solution of linear difference equations whose coefficients are expressible by factorial series. Proc. Cambridge Philos. Soc. **28**, 463—474 (1932).

In einer vorhergehenden Arbeit (vgl. dies. Zbl. **5**, 65) hat Verf. lineare Differenzgleichungen mit rationalen Funktionen als Koeffizienten nach der Booleschen Operatormethode behandelt. Unter Benutzung der dort gewonnenen sowie zweier neuer Hilfssätze wird hier die gleiche Methode angewandt auf eine allgemeinere Gleichung, und zwar vom Typus (der Kürze halber vom zweiten Grad angenommen):

$$(x-1)(x-2) \Delta_{-1}^2 u - [a + p(x)](x-1) \Delta_{-1} u + [b + q(x)]u = 0,$$

wo a und b Konstanten sind und

$$p(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x(x+1)} + \frac{a_3}{x(x+1)(x+2)} + \dots,$$

$$q(x) = \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x(x+1)} + \frac{b_3}{x(x+1)(x+2)} + \dots.$$

Nach passender Umformung der Gleichung wird der Ansatz

$$u = (\alpha_0 q^{-m} + \alpha_1 q^{-m-1} + \alpha_2 q^{-m-2} + \dots) 1$$

eingeführt. Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich eine quadratische Gleichung für m (Wurzeln m_1, m_2) und Rekursionsformeln für die α_i . Man hat so das Fundamentalsystem $u(x, m_1), u(x, m_2)$:

$$u(x, m_1) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+m_1)} \left\{ \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x+m_1} + \frac{\alpha_2}{(x+m_1)(x+m_1+1)} + \dots \right\}.$$

Ist $m_2 = m_1 + p$, wo $p = 0$ oder eine positive ganze Zahl, so sind die beiden Lösungen $u(x, m_1)$ und $\frac{\partial u(x, m_1)}{\partial m_1}$. Die Konvergenz der Lösungen wird nach einer Methode von Nörlund nachgewiesen. Zum Schluß wird als Beispiel behandelt die Gleichung mit $[a + p(x)] = a_1 + \frac{b_1}{x}$, $[b + q(x)] = a_0 + \frac{b_0}{x}$. S. Gradstein (Darmstadt).

Gupta, Hansraj: On numbers in medial progression. J. Indian Math. Soc. **19**, 203 bis 214 (1932).

Verf. beschäftigt sich mit Reihen $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ von der Eigenschaft

$$a_r = a_{r-1} + a_{r-2}, \quad (r \geq 3)$$

(medial progression, M. P.), insbesondere mit der „natürlichen“ M. P., die durch $a_1 = N_1 = 1, a_2 = N_2 = 1$ bestimmt wird. Die a_n sollen ganze Zahlen sein. Mit Hilfe der natürlichen M. P. läßt sich das allgemeine Glied jeder M. P. durch die Anfangsglieder ausdrücken:

$$a_r = N_{r-1} \cdot a_2 + N_{r-2} \cdot a_1.$$

Als weitere Eigenschaften der M. P. werden u. a. abgeleitet:

$$N_r^2 + N_{r-1}^2 = N_{2r-1},$$

$$N_n \equiv 0 \pmod{N_m}, \quad \text{wenn } n \equiv 0 \pmod{m},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$(-1)^n \cdot (a_n^2 - a_{n+1} \cdot a_{n-1})$ ist innerhalb der M. P. konstant. Mit Hilfe der Definition $a_{n-2} = a_n - a_{n-1}$ läßt sich die M. P. nach negativen Indizes fortsetzen, und zwar ist dann $N_{-r} = (-1)^{r+1} N_r$, bzw. allgemein $a_{-r} = (-1)^r (N_{r+1} a_2 - N_{r+2} a_1)$. Schließlich wird noch die Hilfsreihe $A_n = a_{n+1} + a_{n-1}$ eingeführt, insbesondere $M_n = N_{n+1} + N_{n-1}$, und eine Anzahl von Beziehungen zwischen den Gliedern der M. P. und ihrer Hilfsreihe aufgestellt.

S. Gradstein (Darmstadt).

Funktionentheorie:

Desaint, C.: Sur la transformation de $(p+q)$ ^{ième} espèce pour les domaines d'existence. C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 994—997 (1932).

$f_1(z)$ et $f_2(z)$ étant donnés par les éléments tayloriens à l'origine

$$f_1(z) = \sum a(n) z^n, \quad |z| \leq r_1; \quad f_2(z) = \sum b(n) z^n, \quad |z| \leq r_2, \quad r_1 > 1, \quad r_2 > 1,$$

l'auteur cherche dans quelles conditions les singularités de la fonction $F(z)$ définie par l'élément $F(z) = \sum A(n) z^n$, où $A(n)$ est définie par une opération sur les $a(j)$ et $b(k)$, seront données par une autre opération simple à partir des singularités de $f_1(z)$ et $f_2(z)$. Lorsque $A(n) = \psi[a(n), a(n-1), \dots, a(n-p), b(n), \dots, b(n-q)]$, p et q étant fixes et $\psi(x_1, x_2, \dots, x_{p+1}, x'_1, \dots, x'_{q+1})$ holomorphe à l'origine par rapport aux $p+q+2$ variables, le théorème de composition de Hadamard s'applique. Mais en prenant

$$F(z) = -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{C \times C'} \frac{H(x, x') f_1(x) f_2(x') dx dx'}{\varphi(x, x') - z}$$

C et C' restant respectivement dans les domaines d'holomorphie de $f_1(z)$ et $f_2(z)$, H et φ étant holomorphes et φ ne s'annulant pas pour $|x| \geq r_1 - \varepsilon$ et $|x'| \geq r_2 - \varepsilon$, les points singuliers de F appartiennent à l'ensemble $\varphi(z_1, z_2)$, z_1 étant un point singulier de f_1 et z_2 un pt. sing. de f_2 ; les $A(n)$ s'expriment alors assez simplement comme fonctions bilinéaires des $a(j)$, $b(k)$ dont les coefficients dépendent de $\varphi(x, x')$. L'auteur généralise en remplaçant l'intégration double par une intégration d'ordre $p+q$.

G. Valiron (Paris).

Wolff, Julius, et Bastian Grootenboer: Sur une propriété des dérivées d'une fonction à partie réelle positive. C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 997—998 (1932).

Les auteurs démontrent le théorème suivant: Si $f(z) = u(z) + iv(z)$ est holomorphe en $z = x + iy$ et si sa partie réelle $u(z)$ est positive dans le domaine D , $x > 0$, on a en tout point de D

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! u(z)}{x^n}. \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

La démonstration est simple et courte: la formule de Poisson donne

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n \frac{n!}{\pi} r \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} u(z + a + r e^{i\varphi}) d\varphi}{(r e^{i\varphi} - a)^{n+1}}$$

$a > 0$, $0 < r - a < x$; puis

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{2rn! u(z)}{(r-a)^{n-1}(r^2-a^2)}.$$

On suppose alors que $r \rightarrow \infty$ et $r - a \rightarrow x$. La formule (1) est la plus précise de son espèce: on a égalité pour $f(z) = 1/z$ et $z = x$.

G. Valiron (Paris).

Nakano, Hidegorô: Über den Konvergenzbereich einer zweifachen Potenzreihe und seine Anwendungen. Jap. J. Math. **9**, 135—144 (1932).

Unter dem Konvergenzradius $\varrho(r)$ bezüglich z einer Laurentreihe

$$f(w, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,n} w^m z^n$$

wird die obere Grenze derjenigen α verstanden, für welche die Reihe noch in der Umgebung aller Punkte $|w| = r, |z| < \alpha$ absolut konvergiert, $f(w, z)$ also noch regulär ist; $\varrho(r)$ als Funktion von r betrachtet heißt die Konvergenzfunktion der Reihe. Im Falle einer Potenzreihe sind r und $\varrho(r)$ assoziierte Konvergenzradialen. Verf. beweist zunächst die wichtige Formel:

$$\frac{1}{\varrho(r)} = \lim_{|m|+n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_{m,n}|^{n+1} \sqrt[n+1]{|a_{m,n}| r^m}}. \quad (*)$$

Hieraus folgt dann insbesondere, daß $\log \frac{1}{\varrho(r)}$ eine konvexe Funktion von $\log r$ ist. Diese Eigenschaft ist zugleich für die Konvergenzfunktion charakteristisch, d. h. zu jeder

nicht negativen Funktion $\varrho(r)$, für die $\log \frac{1}{\varrho(r)}$ eine konvexe Funktion von $\log r$ ist, existiert umgekehrt eine Laurentreihe, deren Konvergenzfunktion mit $\varrho(r)$ identisch ist. Aus (*) leitet Verf. unter anderem noch folgenden Satz über Funktionen einer Veränderlichen ab: Es sei $f(z)$ auf $|z| = r$ analytisch und $M(r)$ das Max. von $|f(z)|$ auf $|z| = r$; ist dann $[f(z)]^n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn} z^m$ die Entwicklung von $[f(z)]^n$ auf $|z| = r$, so gilt $M(r) = \text{obere Grenze } \sqrt[n]{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_{mn}| r^m}$. Thullen (Münster).

Weaver, Warren: Conformal representation, with applications to problems of applied mathematics. Amer. Math. Monthly **39**, 448—473 (1932).

Abdruck eines Vortrages des Verf., in welchem die Elemente der Theorie der konformen Abbildung sowie Anwendungen auf Kartographie, Hydrodynamik, Elastizitätstheorie und Elektrostatik besprochen werden. Weinstein (Breslau).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

● **Risser, R.:** Les applications de la théorie des probabilités aux sciences économiques et aux sciences biologiques. Fasc. 3. Applications de la statistique à la démographie et à la biologie. (Traité du calcul des probabilités et de ses applications. Publ. par Emile Borel. Tome 3.) Paris: Gauthier-Villars & Cie. 1932. X, 255 S. Fres. 50.—.

Le contenu du livre est beaucoup plus spécial que l'on ne pourrait croire d'après son titre. Dans la partie biologique, on ne trouvera que l'exposition des recherches bien connues de Volterra sur la lutte pour la vie et de la théorie de W. R. Thompson concernant l'action des parasites entomophages. En particulier, la théorie de l'hérédité mendélienne est entièrement laissée de côté. La partie démographique est développée d'une façon plus complète. On trouve ici l'analyse statistique de la mortalité avec une discussion des formules de Makeham et Thiele, de même qu'une exposition de la théorie statistique de morbidité et celle de l'invalidité. Cette dernière théorie conduit l'auteur à la considération de certaines équations intégrales de Volterra. Des applications aux problèmes d'actuariat sont soigneusement discutées. Dans une partie plutôt supplémentaire, des méthodes pratiques d'interpolation et d'«ajustement» des résultats empiriques se trouvent exposées. Quant aux applications biologiques du calcul des probabilités proprement dit, on n'en trouvera, dans ce livre, que peu de chose, comme il résulte d'ailleurs du choix des matières traitées. *A. Kolmogoroff.*

Haldane, J. B. S.: A mathematical theory of natural and artificial selection. Pt. IX. Rapid selection. Proc. Cambridge Philos. Soc. **28**, 244—248 (1932).

In this Paper it is proved that in a random making population in which the ratio between the numbers of two genes in the n th generation is u_n , the coefficient of selection being k , then, approximately,

$$n = \frac{1}{k} (u_n - u_0) + \frac{1}{\log(1-k)} \log \left(\frac{1+u_n^{-1}}{1+u_0^{-1}} \right) + \frac{1-k}{k} \log \left(\frac{1-u_n}{1-u_0} \right).$$

(VIII. see this Zbl. **1**, 152).

V. Glivenko (Moscow).

Allen, Edward S.: The accuracy of the dilution method of estimating the density of a population of micro-organisms. Iowa State Coll. J. of Sci. **6**, 251—262 (1932).

In this Paper some indications are given, concerning the practical applications of a method, developed by R. A. Fisher, for estimating the number of protozoa in a unit volume.

V. Glivenko (Moscow).

Pollaczek, Felix: Zur Theorie des Wartens vor Schaltergruppen. Elektr. Nachr.-Techn. **9**, 434—454 (1932).

Eine Zusammenfassung der früheren Resultate des Verf. [vgl. Math. Z. **32**, 64 bis 100 und 729—775 (1930)] und die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten \tilde{w}_α dafür, daß irgendeine Person höchstens α Personen an der Schaltergruppe vorfindet.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Wintner, Aurel: On an application of diophantine approximation to the repartition problems of dynamics. J. London Math. Soc. 7, 242—246 (1932).

Es sei $f(t) \sim \sum_{\kappa=0}^{\infty} \varrho_{\kappa} \cos \lambda_{\kappa}(t - \delta_{\kappa})$ eine reellwertige fastperiodische Funktion, $[f < x; T]$ die Menge der t -Werte im Intervall $-T < x < T$, für die $f(t) < x$ gilt. In einer früheren Arbeit zeigte der Verf., daß es genau eine Verteilungsfunktion $F(x)$ gibt, derart, daß an allen Stetigkeitsstellen von $F(x)$ die Relation

$$F(x) = \lim (2T)^{-1} \text{mes}[f < x; T]$$

gilt. $S_{\kappa}(x)$ sei die zur einzelnen Schwingung $s_{\kappa} = \varrho_{\kappa} \cos \lambda_{\kappa}(t - \delta_{\kappa})$, $F_m(x)$ die zur Teilsumme $f_m(x) = \sum_{\kappa=1}^m s_{\kappa}$ gehörige Verteilungsfunktion. Der Verf. zeigt in der vorliegenden Arbeit, daß sich im Fall linear unabhängiger Frequenzen λ_{κ} die Funktion $F_m(x)$ ähnlich wie im Fall statistisch unabhängiger Ereignisse s_{κ} vermöge der Rekursionsformel

$$F_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{m-1}(x - y) dS_m(y) = \int_{-\infty}^{\infty} S_m(x - y) dF_{m-1}(y)$$

berechnet. Da nach einem Satz von H. Bohr die Fourierreihe einer fastperiodischen Funktion mit linear unabhängigen Exponenten im Intervall $-\infty < t < \infty$ gleichmäßig konvergiert, so ergibt sich im Limes $m \rightarrow \infty$ die Verteilungsfunktion $F(x)$ von $f(t)$. Lüneburg (Göttingen).

Hostinsky, B.: Sulla teoria degli errori. Giorn. Ist. Ital. Attuari 3, 139—146 (1932).

Verf. deutet jetzt seine schönen Resultate über die Lösungen der Smoluchovskischen Gleichung (vgl. dies. Zbl. 5, 166—167) in den Termini der Fehlertheorie. Wie seine Fragestellung mit den Diffusionserscheinungen unter der Wirkung der äußeren Kräfte verbunden ist, bleibt dem Ref. unklar. A. Kolmogoroff (Moskau).

Khintchine, A.: Sulle successioni stazionarie di eventi. Giorn. Ist. Ital. Attuari 3, 267—272 (1932).

Man nennt eine Folge zufälliger Ereignisse $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ stationär, wenn die Wahrscheinlichkeit jedes Ereignisses dieser Folge dieselbe ist und die Wahrscheinlichkeit $P(E_i, E_k)$, daß beide Ereignisse E_i und E_k vorkommen, nur von der Entfernung $|k - i|$ abhängig ist. Es sei $h_n = \frac{m_n}{n}$ die Frequenz unserer Ereignisse im Laufe der ersten n Versuche; dann gilt der folgende Satz: die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung $|h_n - h_{n'}| > \varepsilon$ konvergiert mit $n \rightarrow \infty, n' \rightarrow \infty$ gegen Null, wenn nur $\varepsilon > 0$ ist.

A. Kolmogoroff (Moskau).

● **Montessus de Ballore, R. de:** La méthode de corrélation suivie de la table des carrés des nombres entiers de 1 à 1000. Paris: Gauthier-Villars et Cie. 1932. 77 S. Frs. 15.—.

In knapper, klarer Darstellung werden die einfachsten Fragen der Korrelations-theorie behandelt und auch die kritischen Fragen in instruktiven Ausführungen gekennzeichnet. Die wichtigsten behandelten Begriffe und Fragen sind: Zweck und Anwendungsgebiet der Korrelation, Schwerpunkt, Achsendrehung, Bedeutung von Sxy , Korrelationsverhältnis, Zusammenhang von Korrelation und Methode der kleinsten Quadrate, die analytische Bedeutung der Verhältnisse $Sxy:Sx^2, Sx^2:Sxy$, die Regressionsgeraden, starke, mittlere, schwache Korrelation. Zahlreiche numerische Beispiele beleuchten die entwickelten Methoden. F. Knoll (Wien).

Camp, Burton H.: The converse of Spearman's two-factor theorem. Biometrika 24, 418—427 (1932).

Nach Angabe eines Beispiels dafür, daß der Beweisgang Spearmans nicht allgemein zutrifft, sondern daß eine weitere Voraussetzung ergänzend anzubringen wäre, formuliert Camp die Umkehrung des Satzes von Spearman in der folgenden Weise: Betrachtet man an n Untersuchungsobjekten N Einzeltatsachen ($N > n + 1$) mit den entsprechenden Zahlwerten $a_{\alpha\beta}, \alpha = 1, 2, \dots, n; \beta = 1, 2, \dots, N$; setzt man überdies

voraus: $\sum_{\beta} a_{\alpha\beta} = 0$, $\sum_{\beta} a_{\alpha\beta}^2 = 1$; ist weiter $r_{ik} \geq 0$, $r_{i,k,j} \geq 0$ und bilden die r_{ik} eine Hierarchie, d. h. ist für beliebige Wahl von i und k bei Ausschluß der Größen $r_{ii}: r_{i1}: r_{i2}: \dots: r_{in} = r_{k1}: r_{k2}: \dots: r_{kn}$, dann besagt die Umkehrung der Zwei-Faktor-Regel, daß es in der immer bestehenden Darstellung $a_{\alpha\beta} = C_{\alpha} g_{\beta} + s_{\alpha\beta}$ möglich ist, die Größen C_{α} , g_{β} , $s_{\alpha\beta}$ so zu bestimmen, daß $r_{s_l s_k} = 0$ und $r_{s_l g} = 0$, $l \neq k$. Der Beweis benützt die Abbildung des Wertesystems $(a_{1\beta}, a_{2\beta}, \dots, a_{n\beta})$ durch einen Punkt eines n -dimensionalen Raumes, der auf einen $(n+1)$ -dimensionalen Raum in passender Weise erweitert wird.

F. Knoll (Wien).

Wishart, J., and M. S. Bartlett: The distribution of second order moment statistics in a normal system. Proc. Cambridge Philos. Soc. 28, 455—459 (1932).

Die Größe x sei einer normalen Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ unterworfen. Durch Einführung der erzeugenden Funktion $K = \log M$, $M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \Phi(x) dx$ für die Verteilung der Größe x^2 werden in einfacher Weise die Verteilungsfunktionen $f(\Sigma)$ und $f(s^2)$ für die Größen $\Sigma = \sum_{i=1}^n x_i^2$ bzw. $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ berechnet. Dieselbe Methode führt auch im Fall zweier unabhängiger normal verteilter Variablen x und y zu den entsprechenden Ergebnissen.

Lüneburg (Göttingen).

Veress, P.: Contributo alla matematica delle assicurazioni sociali. Giorn. Ist. Ital. Attuari 3, 187—196 (1932).

Die Berechnungen der Pensionsversicherungen beruhen hauptsächlich auf drei Rechnungsgrundlagen: Zinsfuß, Sterblichkeits- und Invaliditätsstatistik, Gehaltsstatistik. Unter der Annahme, daß die Prämie einen gewissen Prozentsatz des jeweiligen Gehaltes und die Invaliditäts-, Alters- bzw. Hinterbliebenenrente einen Prozentsatz des zuletzt bezogenen Gehaltes betragen, sowie unter gewissen, sehr allgemein zutreffenden Voraussetzungen über die Sterblichkeits- und Invaliditätsgrundlagen wird folgendes bewiesen: wenn, unter Beibehaltung aller sonstigen Grundlagen, in der Gehaltsstatistik die Gehaltshöhe für ein oder mehrere Alter vergrößert wird, so wächst die Nettoprämie. — Die heutigen Gehaltsstatistiken weisen bis zu einem gewissen Alter ein Ansteigen und von diesem Alter an ein Abnehmen der Gehälter auf. Diese Erscheinung hält Verf., besonders in der Privatangestelltenversicherung, für vorübergehend und durch die anormalen Verhältnisse bedingt, durch welche vielfach Leute in höherem Alter gezwungen werden, als Anfänger zu arbeiten. Da also anzunehmen ist, daß die Durchschnittsgehälter in den höheren Altersklassen im Laufe der Zeit steigen werden, so folgt aus dem eingangs formulierten Satze, daß die auf Grund der heutigen Gehaltsstatistiken berechneten Prämien sich als unzureichend erweisen dürften.

Birnbaum (Lwów).

Wyss, Hans: Kleine Bemerkung zum Zinsfußproblem. Skand. Aktuarie Tidskr. 15, 278—285 (1932).

Holme, Harald: Beitrag zur Berechnung des effektiven Zinsfußes bei Anleihen. Skand. Aktuarie Tidskr. 15, 225—250 (1932).

Geometrie.

Chisini, Oscar: La non equidecomponibilità di poliedri equivalenti. Period. Mat., IV. s. 12, 279—295 (1932).

Nach M. Dehn (Math. Ann. 55) ist die Zerlegungs- und die Ergänzungsgleichheit von Polyedern grundsätzlich von ihrer Inhaltsgleichheit verschieden. Der Gedankengang des Dehnschen Beweises wird hier in ausführlicherer Form als in der Originalarbeit wiedergegeben und der Beweis dabei, nach Meinung des Verf., an einer Stelle berichtigt.

Friedrich Levi (Leipzig).

Steck, Max: Das Zeuthensche Postulat und das Prinzip der Vertauschung zur Begründung der projektiven Geometrie. Heidelberg: Diss. 1932. 79 S.

Verf. gibt eine ausführliche Begründung der projektiven Geometrie mit Hilfe der räumlichen Verknüpfungssätze und des folgenden Vertauschungsaxioms: „Ist der Pascalsche Satz der Ebene für irgend 6 Punkte erfüllt, so ist er für dieselben immer

erfüllt, wie man auch die Numerierung der einzelnen Punkte wählen mag“, ein Satz, der gewiß zur Begründung der projektiven Geometrie ohne Kongruenz und Stetigkeit ausreicht, weil er auf Grund ebener Verknüpfung den Pappus-Pascalschen Satz unmittelbar zur Folge hat. — In einem Anhang wird die Beweisbarkeit des Satzes: „Erfüllen 6 Punkte der Ebene die Pascalrelation, so folgt aus der Annahme, daß die Punkte 1, 3, 5 nicht in einer Geraden liegen, daß auch die Punkte 2, 4, 6 nicht in einer Geraden liegen“ untersucht, wenn nur die ebenen Axiome der Verknüpfung und Anordnung benutzt werden.

Ruth Moufang (Königsberg i./Pr.).

Bennett, Albert A.: Some relations in the geometry of the triangle. Amer. Math. Monthly **39**, 577—578 (1932).

Cesàro, G.: Sur une propriété du décagone régulier. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. s. **17**, H. 3, 1—8 (1932).

Cesàro, G.: Segments déterminés sur les médianes d'un triangle sphérique par leur point d'intersection. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. s. **17**, H. 3, 15—22 (1932).

Cesàro, G.: Relation entre le périmètre, $2p$, et les rayons, r et R , des cercles inscrit et circonscrit, dans un triangle rectiligne isocèle. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. s. **17**, H. 3, 23—30 (1932).

Winger, R. M.: On certain projective trochoids. Amer. Math. Monthly **39**, 578—589 (1932).

Weitzenböck, R.: Die projektiven Invarianten von vier Ebenen im R_5 . Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **35**, 1026—1029 (1932).

Ein kleinstes vollständiges System projektiver Invarianten von 4 Ebenen a, α, p, π des R_5 besteht aus den 6 bilinearen Invarianten vom Typus $(a^3 \alpha^3)$ und einer 7. Invariante $(a^3 \alpha^2 p)$ ($\alpha p^2 \pi^3$), die auch durch eine in allen 4 Ebenen symmetrische Invariante ersetzt werden kann.

E. A. Weiss (Bonn).

Ichida, Asajiro: An elementary proof of the Grace's theorem on double sixers. Jap. J. Math. **9**, 63—65 (1932).

Aus 5 Trefflinien einer Geraden r läßt sich bekanntlich eine Doppelsechs herleiten. In ihr „entspreche“ die Gerade r' der Geraden r . Geht man jetzt von 6 Trefflinien der Geraden r aus, und konstruiert man zu je fünf von ihnen die r „entsprechende“, so besitzen die 6 erhaltenen Geraden eine gemeinsame Trefflinie. Für diesen Satz von I. H. Grace wird auf Grund eines Lemmas von T. Kubota ein metrisch-analytischer Beweis gegeben.

E. A. Weiss (Bonn).

Algebraische Geometrie:

Segre, Beniamino: Alcuni risultati di geometria algebrica. Boll. Un. Mat. Ital. **11**, 265—267 (1932).

L'A. riassume alcune sue recenti ricerche, relative alla determinazione di certi gruppi covarianti di due o più serie lineari, alle condizioni per la regolarità di un sistema lineare di forme, ed alle superficie aventi il sistema canonico composto con un'involuzione.

Autoreferat.

Segre, Beniamino: Determinazione di certi gruppi covarianti di due o più serie lineari. Rend. Circ. mat. Palermo **56**, 214—222 (1932).

Considérons $\omega + 1$ séries linéaires $g_{n_0}^{r_0}, g_{n_1}^{r_1}, \dots, g_{n_\omega}^{r_\omega}$ sur une courbe algébrique C de genre p . L'auteur étudie les systèmes de $\omega + 1$ groupes $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_\omega$ de respectivement $k_0, k_1, \dots, k_\omega$ points ($k_0 \geq k_1 \geq \dots \geq k_\omega$) tels que chacun soit contenu dans le précédent et que Γ_σ appartienne à $g_{n_\sigma}^{r_\sigma}$ ($\sigma = 0, 1, \dots, \omega$). Moyennant les hypothèses suivantes: $n_0 \geq k_0 \geq k_1 \geq r_0$, $n_i \geq k_i \geq r_i$ ($i = 1, \dots, \omega$), $\sum_{i=1}^{\omega} k_i = \sum_{j=0}^{\omega} r_j$, il existe un nombre fini λ de tels systèmes ($\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_\omega$). Cela étant, l'auteur montre que les groupes G_σ constitués par les Γ_σ de ces λ systèmes satisfont aux équivalences: $G_\sigma \equiv \varphi_\sigma^0 A_0 + \varphi_\sigma^1 A_1 + \dots + \varphi_\sigma^\omega A_\omega + \varphi_\sigma^{\omega+1} K$ ($\sigma = 0, 1, \dots, \omega$), où A_i appartient

en général à g_n^i et où K est un groupe canonique de C . On en déduit l'égalité numérique: $\lambda k_\sigma = n_0 \varphi_\sigma^0 + n_1 \varphi_\sigma^1 + \dots + n_\omega \varphi_\sigma^\omega + (2p-2) \varphi_\sigma^{\omega+1}$, qui généralise des formules de Castelnuovo et Comessatti établies par des procédés énumératifs. La démonstration de B. Segre procède par récurrence et donne le moyen de calculer de proche en proche les coefficients φ_σ^i . En particulier, l'ensemble des groupes de $r+s$ points communs à deux séries g_n^r, g_m^s satisfait à une telle relation d'équivalence dont les coefficients ont des expressions simples ainsi que le nombre $\lambda_{n,m}^{r,s}$ de ces groupes. Comme application, l'auteur donne une nouvelle démonstration du fait que la variété de Jacobi M_p relative à C a une variété canonique d'ordre zéro. *P. Dubreil.*

Ales, Maria: Intorno ai gruppi jacobiani delle serie lineari. Rend. Circ. mat. Palermo 56, 209—213 (1932).

Si l'on a sur une courbe C algébrique une g_n^r dont G est un groupe quelconque, le groupe J jacobien de g_n^r — constitué par les points de C qui ont la multiplicité $r+1$ pour quelque groupe de g_n^r — est donné par l'équivalence: $J \equiv (r+1)G + \frac{r(r+1)}{2}K$, dans laquelle K est un groupe canonique. C'est là un résultat bien connu, établi d'abord par C. Segre (1894) pour $r=1$, et puis — en suivant des voies différentes — par Severi (1908), De Franchis (1912) et Enriques (1919) pour r quelconque; au point de vue numératif, il donne respectivement les formules classiques de Riemann et de De Jonquières. — Ici on développe une idée de De Franchis, et on démontre ladite équivalence en employant la représentation paramétrique de la courbe C (p. ex. au moyen des fonctions fuchsienues), et quelque simple propriété des fonctions analytiques.

Beniamino Segre (Bologna).

Gambier, Bertrand: Intersection de deux courbes planes algébriques. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 1057—1059 (1932).

L'auteur montre que les points communs à deux courbes planes algébriques de degré m et p peuvent être confondus en un seul: le cas où l'une est de degré 2 ou 3 est immédiat; on se borne donc au cas où chacune est au moins de degré 4 et le théorème d'Abel, généralisé ou non, sert de base à la démonstration. C'est ainsi que la quartique unicursale à point triple d'équation réduite $y = x^2 - \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$ donne, pour des valeurs convenables de A et B , une seule intersection avec une certaine courbe ω de degré p ; sur la quartique $y = x^2 - \frac{i}{16x} + \frac{i}{16(x-1)}$, le point $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1-i}{4}$ donne 16 points bases confondus pour un faisceau de quartiques (dont aucune ne se réduit à une droite quadruple ni à une conique double). L'auteur termine en étudiant la surabondance des groupes de points ainsi réunis en un seul; il développera dans une Note ultérieure les conséquences que donne à ce point de vue l'équation différentielle d'ordre $\frac{m(m+3)}{2}$ que vérifient toutes les courbes de degré m du plan.

P. Dubreil (Paris).

Gambier, Bertrand: Congruence de cercles: points focaux et surfaces focales. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 928—930 (1932).

L'auteur attire l'attention sur le problème de la distribution des points focaux d'une congruence de courbes algébriques et étudie à ce point de vue les congruences de cercles. Les points à l'infini de chaque cercle sont deux points focaux, en dehors desquels il en existe 4. Deux de ces points peuvent aller à l'infini si la congruence des axes est isotrope. M. Gambier avait cru par suite d'une erreur d'interprétation que ces mêmes points ne peuvent pas aller tous les quatre à l'infini, mais cette affirmation était prématurée; M. Vincensini d'accord avec l'aut. a déterminé les congruences où les 6 points focaux sont tous à l'infini. Ayant écarté ces éventualités et après quelques remarques sur le cas — déjà étudié par Darboux — où les quatre points focaux sont distincts, l'auteur étudie les différents cas qui peuvent de présenter, cad.: 1°) deux points focaux confondus, les deux autres étant distincts, 2°) deux couples de points

focaux confondus, 3°) un point focal triple, enfin, 4°) un point focal quadruple. Le premier cas est étudié au moyen d'un système de deux équations aux dérivées partielles, qui n'admet pas toujours de solutions et dont la discussion conduit à des propriétés géométriques intéressantes. Les cas suivants sont étudiés d'une manière purement géométrique: la surface focale étant donnée arbitrairement, on peut déterminer les cercles répondant à la question.

P. Dubreil (Paris).

● **Enriques, Federigo: Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche. Raccolte dal Luigi Campedelli. 1. Pt. Padova: Antonio Milani 1932. IV, 483 S. L. 68.—.**

In the present volume, referred to as Part I, we find a systematic and masterly exposition of the theory of algebraic surfaces based on and derived from the study of linear systems of curves on a surface. The fact that the author, in collaboration with Castelnuovo, has been the founder of the theory, endows the exposition with all the qualities of first hand information. In the introduction the preliminary notions of a birational transformation, exceptional curves, etc., are given. The theorem on the resolution of the singularities is only stated, and for the proofs the reader is referred to the original papers of B. Levi, Chisini and Albanese. The first chapter deals with the general properties of linear systems on a surface F , their effective and virtual characters, complete systems and operations (addition and subtraction) on complete systems. The discussion leads up gradually to the outstanding conclusion, of prime importance for the theory, that given any linear system, irreducible or not, of dimension ≥ 0 , it has a virtual genus and a virtual degree, uniquely defined and invariant under birational transformations. In the second chapter the theory of invariants of F is developed. The point of departure is the Jacobian system $|C_j|$ of a complete system $|C|$, irreducible and of dimension > 1 . This is a birationally covariant system of $|C|$, and so is the system $|C_j - 2C|$ — the adjoint system $|C'|$ — with proper conventions for the virtual multiplicities for $|C'|$ of the base points of $|C|$. The fundamental relation $|C_j + 3D| = |D_j + 3C|$ serves a two-fold purpose: a) it is used to extend the definition of $|C_j|$ and $|C'|$ to systems $|C|$, reducible or of dimension < 2 ; b) it leads directly to the recognition of the independence of $|C_j - 3C|$ from $|C|$ and of its birationally invariant character, to within exceptional curves of F . This system, supposed existent, deprived of the exceptional curves, its fixed components, is the canonical system $|K|$, absolutely invariant. Its characters and the characters of its multiples $|2K|$, $|3K|$, ... furnish the absolute invariants of F , p_g , $p^{(1)}$ and the plurigenera. From these invariantive definitions of $|C'|$ and $|K|$ we pass in the next chapter to the projective construction of these systems on an F in S_3 , by means of the adjoint surfaces, and to the theorem of the residue in its projective form. The main feature of this chapter is a penetrating analysis of the isolated singularities of F and of the conditions which they impose on the adjoint surfaces. On a model of F void of singularities, an isolated singularity of F is represented by a fundamental curve θ of the system $|C|$ corresponding to the system of plane sections of F . The more or less complicated nature of the singularity depends mainly on the fact that θ may be reducible and that a part of it, θ_1 , may be fundamental for the residual system $|C - \theta|$, while a part of θ_1 may be still fundamental for $|C - \theta - \theta_1|$, etc. These considerations lead to a scheme of the singularity, which the author illustrates with examples of certain well known types of singularities. The property of the adjoint curves C' of cutting out on a C canonical sets ceases to characterize $|C'|$, if θ is a proper fundamental curve, and must be supplemented by further conditions relative to the sets of points cut out by $|C'|$ on the curves of the above successive residual systems. The fourth chapter is devoted to the generalized theorem of Riemann-Roch, and gives, among other things, Enriques' proof of the invariance of the arithmetic genus, the theorem of Castelnuovo on the maximum of the deficiency of the characteristic series of a complete system, and the theorem of Picard, completed by Severi, on the regularity of the adjoint systems. The last

and the longest chapter (about a half of the whole volume) deals with miscellaneous applications of the general theory to the classification of algebraic surfaces, as for instance, to mention a few, the canonical surfaces, a thorough study of doubly covered planes, conditions of rationality of a surface, etc. All these applications, beside their intrinsic importance, serve admirably to illustrate on particular surfaces the general theorems of the theory. This and numerous examples which are found in each of the preceding chapters greatly add to the value of the treatise as an excellent textbook.

O. Zariski (Baltimore).

De Franchis, M.: Intorno al significato di alcuni caratteri delle varietà algebriche. Rend. Circ. mat. Palermo **56**, 223—227 (1932).

Als Verallgemeinerung des bekannten (vgl. De Franchis, „Restituzione di priorità“, Rend. Circ. mat. Palermo **56**, 238) Zusammenhangs zwischen dem Ort $\Omega_{C\Gamma}$ der Berührungspunkte der Kurven Γ , C zweier Büschel (Γ), (C) auf einer algebraischen Fläche und den kanonischen Kurven K der Fläche wird bemerkt, daß für eine k -kanonische Kurve H die Äquivalenz

$$k\Omega_{C\Gamma} = 2k(C + \Gamma) + H$$

besteht. Ist weiter $\Omega_{C\Gamma}^{(k)}$ der Ort (Kurve) der k -fachen Berührungspunkte der Kurven C eines Büschels (C) mit den Kurven Γ eines linearen Systems ∞^k , so gilt die Äquivalenz

$$\Omega_{C\Gamma}^{(k)} = k(k+1)C + (k+1)\Gamma + \frac{k(k+1)}{2}K.$$

Eine Andeutung einer k -dimensionalen Verallgemeinerung beschließt die Note.

van der Waerden (Leipzig).

Archbold, J. W.: On special Cremona involutions and transformations. Proc. London Math. Soc., II. s. **34**, 340—359 (1932).

The determination of all the Cremona involutorial transformations in S_4 defined by systems ∞^4 of quadrics of degree 2. The great variety of possible cases is set forth in a table. The involution by quadrics through an elliptic C_4 and two points Y_1, Y_2 is discussed in detail. The transformation is of order 5 with C_4 as triple base curve and Y_1, Y_2 as 4-fold points. By projection into S_3 some special Geiser involutions in S_3 are deduced, and conversely, some of the involutions in S_4 are derived by projection from involutions in S_5 . Incidentally, it is shown that the normal rational sextic surface in S_5 with hyperplane sections of genus 2 has two apparent double points. This follows from the plane representation of this surface by means of quartic curves with one base double point and 6 simple base points.

O. Zariski (Baltimore).

Differentialgeometrie:

Wilhelm, Friedrich: Über Kurvenscharen im gewöhnlichen Raume. Mitt. math. Semin. Gießen H. **22**, 1—29 (1932).

The configuration considered is a family of ∞^n curves in space; chiefly, $n = 5, 6, 7$. The problem is to find conditions under which the curves distribute themselves on ∞^s surfaces so that each surface contains ∞^c curves and each curve belongs to ∞^k surfaces; necessarily, $s + c = n + k$. For $n = 5$, the question was answered by P. Finke in a Greifswald dissertation, 1909. The author simplifies Finke's work, and then goes on to give the results for $n = 6, 7$, together with some interesting examples. A by-product of the work is a condition that the general differential equation of n th order in y, z as functions of x have an integral of the form $F(x, y, z; c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$; in other words, that the integral curves of the equation distribute themselves on ∞^n surfaces.

Douglas (Cambridge, Mass.).

Chen, H. S.: Pairs of plane curves with points in one-to-one correspondence. Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Peiping A **1**, 145—153 (1932).

Soient deux courbes planes C_y, C_z définies respectivement par trois fonctions y_1, y_2, y_3 et trois fonctions z_1, z_2, z_3 d'un paramètre x , les fonctions $y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ constituant un système fondamental de solutions d'un système S de deux équations

différentielles linéaires. En considérant les points P_y et P_z de C_y et C_z qui correspondent à une même valeur de x , on a une correspondance biunivoque entre les deux courbes. Après avoir mis le système S sous forme canonique, l'Auteur étudie un certain nombre de problèmes simples tels que: condition pour que C_y et C_z soient des coniques, lieu du point de rencontre des tangentes à C_y et C_z en des points correspondants, enveloppe de la droite joignant des points correspondants, etc.

P. Dubreil (Paris).

Lebel, J.: Sur une représentation schématique du groupe des douze surfaces de Darboux. Bull. Sci. math., II. s. 56, 363—366 (1932).

Les douze surfaces de Darboux sont représentées par les sommets d'un prisme hexagonal dont les arêtes correspondent aux diverses relations entre elles.

S. Finikoff (Moscou).

Bassi, Achille: Sulla riemanniana dell' S_n proiettivo. Rend. Circ. mat. Palermo 56, 228—237 (1932).

Der komplexe projektive n -dimensionale Raum (reell $2n$ -dimensional) wird auf seine kombinatorisch-topologischen Eigenschaften näher untersucht. Das wesentliche Hilfsmittel ist dabei die Zerlegung des Raumes in $n+1$ abgeschlossene Zellen (van der Waerden, Math. Ann. 102), die dadurch definiert sind, daß eine feste Koordinate absolut \leq den übrigen ist. Es ergibt sich die bekannte Tatsache, daß diese Räume torsionsfrei sind und ihre Bettischen Zahlen abwechselnd die Werte 0 und 1 annehmen.

Friedrich Levi (Leipzig).

Vincensini, P.: Congruences à surface moyenne plane et questions qui s'y rattachent. Bull. Sci. math., II. s. 56, 366—384 (1932).

Soit (S) une surface qui correspond au plan (P) par orthogonalité des éléments linéaires. La droite Δ menée par un point de (P) parallèlement à la normale correspondante de (S) engendre une congruence (Δ) admettant (P) pour surface moyenne. L'auteur examine les congruences (Δ) normales. Le segment focal de (Δ) est égal à la projection sur la perpendiculaire à (P) du segment focal de la normale de (S) . D'où suit: les sections des surfaces orthogonales aux rayons Δ par le plan (P) sont des lignes d'ombilics. Il n'existe pas de congruences ΔW normales sauf certaines congruences dont l'une des nappes focales dégénère en courbe. Détermination de toutes les congruences en question ainsi que des surfaces minima (S) qui y correspondent.

S. Finikoff (Moscou).

Ślebodziński, W.: Sur la théorie des affineurs symétriques gauches et des invariants intégraux. Prace mat. fiz. 40, 1—45 u. franz. Zusammenfassung 46 (1932) [Polnisch].

Diese Arbeit besteht aus einigen fast selbständigen Ansätzen über alternierende Größen. — Zuerst wird der Zusammenhang zwischen p -Vektoren und $(n-p)$ -Vektordichten aufgestellt. Dieser läßt sich auf die Schoutensche Formel (Schouten, Der Ricci-Kalkül S. 32, Formel (50). Berlin: Julius Springer 1924) zurückführen, wenn man nun bedenkt, daß die von Null verschiedene Komponente eines n -Vektors eine skalare Dichte ist. Dann wird „die Verlängerung“ $\bar{X}\Phi$ des Lieschen Symbols $X = X^\mu \partial/\partial x^\mu$ auf einen beliebigen Affinor Φ angegeben. Diese Verlängerung ist geometrisch am einfachsten folgendermaßen zu deuten (Ref.): $\bar{X}\Phi$ ist die kovariante Übertragung von Φ längs des Feldes X^μ , und zwar in bezug auf eine Konnexion, in welcher das Feld X^μ mit sich selbst „verkehrt“ parallel ist,

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} X^\nu = -\Gamma_{\lambda\mu}^\nu X^\mu, \quad (\nu, \lambda, \mu = 1, \dots, n)$$

Aus dieser Auffassung folgen dann leicht verschiedene vom Autor bewiesene Sätze. (Z. B. die Anwendung von \bar{X} auf vektorielle Dichten usw.) Aus dem Satze: „Die n. u. h. Bedingung für die Invarianz von $\int A_{[\lambda_1 \dots \lambda_s]} dx^{\lambda_1} \dots dx^{\lambda_s}$ in bezug auf X ist $\bar{X}A_{[\lambda_1 \dots \lambda_s]} = 0$ “ (also die kovariante Konstanz von A in bezug auf die obenerwähnte Übertragung), folgen einige Behauptungen über Integralinvarianten, welche eine

interessante Klassifizierung von Affinoren in bezug auf die Transformationsgruppe mit dem Symbole X gestatten. — Im zweiten Teile wird ein $2n$ -dimensionaler Raum insgesamt mit den Koordinatentransformationen $x \rightarrow x'$ betrachtet, bei welchen das Poissonsche Symbol

$$('x^\alpha, 'x^\beta) = \begin{cases} 0 & \text{bei } |\beta - \alpha| \neq n \\ 1 & \beta - \alpha = n \end{cases} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 2n).$$

In diesem Raume spielt der Bivektor $I_{\alpha\beta} (= 0$ für $|\beta - \alpha| \neq n, = 1$ für $\beta - \alpha = n)$ eine analoge Rolle, wie der Fundamentaltensor im metrischen Raume. Der Autor bedient sich dieses Bivektors um — neben einigen elementaralgebraischen Erwägungen — die Invarianten eines Hamiltonschen Differentialsystems zu studieren. Als Beispiel sei hier der folgende Satz erwähnt: „Das System

$$\frac{dx^\alpha}{N^{[\alpha\beta]} \frac{\partial}{\partial x^\beta} H} = dt, \quad \text{Det } N^{[\alpha\beta]} \neq 0$$

ist das allgemeinste, bei welchem $\frac{1}{2} \int N_{[\alpha\beta]} dx^\alpha dx^\beta$ eine absolute Invariante ist.“

Hlavatý (Praha).

Whitehead, J. H. C.: Locally homogeneous spaces in differential geometry. Ann. of Math., II. s. 33, 681—687 (1932).

The paper is concerned with spaces which the author calls locally homogeneous spaces with a Lie pseudo-group. Using the terminology of the Cambridge tract, The foundations of differential geometry, by the author and O. Veblen, such a space may be defined as an n -dimensional manifold of class 2 whose pseudo-group of automorphisms is transitive and is an r -parameter pseudo-group of Lie. The space is called an \mathfrak{G}_n if it satisfies a certain completeness condition. The purpose of the paper is to prove the theorem that if two \mathfrak{G}_n 's are locally equivalent (that is to say if their infinitesimal groups are similar) then they are equivalent in the large also. *Tibor Radó.*

Hosokawa, Tōyomō: Conformal property of a manifold B_n . Jap. J. Math. 9, 59—62 (1932).

Eine n -dimensionale Berwaldsche Mannigfaltigkeit B_n mit dem (Finslerschen) Fundamentaltensor $g_{\lambda\mu}(x, x')$ ist zu einer zweiten B'_n mit dem Tensor $'g_{\lambda\mu}(x, x')$ konform, wenn:

$$'g_{\lambda\mu}(x, x') = g_{\lambda\mu}(x, x') e^{2\sigma}, \quad \sigma = \sigma(x), \quad \sigma_{,\alpha} = \frac{\partial \sigma}{\partial x^\alpha}.$$

Sind nun $I''_{\lambda\mu}(x, x')$ und $'I''_{\lambda\mu}(x, x')$ bzw. die Komponenten der affinen Zusammenhänge zweier Berwaldscher Mannigfaltigkeiten, so werden die charakteristischen Bedingungen „projektiver“, d. h. „bahntreuer“ Verwandtschaft durch ein Theorem von M. S. Knebelman [Collineations and Motions in Generalized space. Amer. J. Math. 51, 527 (1929)] formuliert. Entsprechend stellt sich Verf. die Aufgabe, notwendige Bedingungen für $g_{\lambda\mu}(x, x')$ zu finden, welche bei projektiver Verwandtschaft für zwei konform vorausgesetzte Berwaldsche Mannigfaltigkeiten B_n und B'_n bestehen müssen: Sie lauten:

$$2(n+1)(n-2)g^{\nu\omega} + 2(n+1)g_{\lambda}^{\omega} x'^{\nu} + 2g^{\nu\mu} g_{\lambda\mu}^{\omega} - (n+1)g^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu}^{\omega} + g^{\lambda\mu} g_{\alpha\mu}^{\omega} x'^{\nu} = 0.$$

M. Pinl (Berlin).

Wundheiler, A.: Rheonome Geometrie. Absolute Mechanik. Prace mat. fiz. 40, 97—142 (1932).

Der Verf. behandelt die Differentialgeometrie eines Systems von Hyperflächen in einem Riemannschen Raume, worin jede Hyperfläche einen bestimmten Wert einer ausgezeichneten Koordinate t des Raumes zugeordnet ist, während die anderen Koordinaten in von t abhängiger Weise transformiert werden können. Besonders ausführlich behandelt er die nicht-holonomen m -Richtungssysteme in den Hyperflächen. Die ausgezeichnete Veränderliche kann als Zeit, der Fundamentaltensor als kinetische Energie und das m -Richtungsfeld als Bindungen eines nicht-holonomen mechanischen Systems gedeutet werden. Die Bewegungsgleichungen werden in gegenüber zeitabhängigen Transformationen invarianter Form erhalten. Mit derselben Invarianz be-

handelt Verf. noch: Klassifikation der mechanischen Systeme vom Gesichtspunkt der Zeitabhängigkeit, natürliche Gleichungen der Bewegung, Bedingungen für die Existenz eines Energieintegrals und die Reaktionskräfte. *E. R. van Kampen* (Baltimore).

Kähler, Erich: Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **9**, 173—186 (1932).

Der Verf. untersucht eine reell $2n$ -dimensionale Hermitesche Metrik

$$ds^2 = g_{ik} dx_i d\bar{x}_k.$$

(\bar{x} bedeutet die konjugiert komplexe Größe zu x) bei „pseudokonformen“ Transformationen $x'_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ und $\bar{x}'_i = \bar{\varphi}_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$. ($i = 1, \dots, n$)

Im besonderen betrachtet er den Fall $g_{ik} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial \bar{x}_k}$, weil zu diesem Typus gewisse in der Theorie der automorphen Funktionen auftretende Metriken gehören („hyperfuchsische“ und „hyperabelsche“ Transformationen). Der Riemannsche Krümmungstensor und dessen Verjüngung werden berechnet; letztere kann auf die folgende Form gebracht werden:

$$R_{ik} = \frac{\partial^2 \log D}{\partial x_i \partial \bar{x}_k}, \quad \text{wo} \quad D = \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial \bar{x}_m} \right|.$$

Mit den g_{ik} und R_{ik} werden Integralinvarianten gebildet, welche zu Randintegralen umgebildet werden, die aber nicht invariant sind. Die Lösung der Einsteinschen Gleichungen $R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$ wird im wesentlichen zurückgeführt auf die Lösung der Gleichung $D = e^{\lambda U}$ und diese Lösung auf ein Variationsproblem. Verwendung dieser Entwicklungen für die Theorie der automorphen Funktionen wird angekündigt.

Griss (Doetinchem).

Churchill, R. V.: Canonical forms for symmetric linear vector functions in pseudo-euclidean space. Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 784—794 (1932).

This paper contains the algebraical and geometrical classification of the symmetrical tensor of the second degree in a four dimensional space with

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - t^2.$$

In such a space there are three kinds of vectors, those with positive, negative and zero squares. There are three kinds of planes, those containing no directions of zero square, those containing two such directions, and the singular type with one such direction. The classification of the symmetrical tensor of the second degree is made according to whether the tensor has an invariable plane of a non-singular type or no such plane. In this last case it has at least one invariable plane with one direction of zero space. Then the theorem is proved that every symmetric tensor of second degree has at least two perpendicular invariable directions and at least one of its invariable directions has a positive square. The author remarks that a corresponding theory for alternating tensors of second degree is due to G. Y. Rainich, Trans. Amer. Math. Soc. **27**, 113 (1925).

Struick (Cambridge).

Bortolotti, Enea: Spazi proiettivamente piani. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **11**, 111—134 (1932).

Im ersten Absatz werden die bisherigen Ergebnisse der Theorie der projektiv-ebenen Räume zusammengestellt, von Cayley, Beltrami, ... usw., bis zu Whitehead. Im zweiten Absatz wird die geometrische Konstruktion solchen Räumen der analytischen (Whitehead) gegenübergestellt. — Es ergibt sich insbesondere eine interessante Konstruktion der projektiven Konnexion, die eine direkte Verallgemeinerung der Konstruktion von Cayley-Beltrami ist: Es sei ein n -dimensionaler Raum X_n gegeben. In jedem laufenden Punkte P von X_n sei der projektive Tangentialraum $E_n(P)$ von X_n errichtet, der P als festen ausgezeichneten Punkt hat. Im $E_n(P)$ sei eine nichtausgeartete Quadrik $Q(P)$ gegeben, welche den Punkt P nicht enthält. (Veblen, Quart. J. Math., Oxford. Ser. I, **1930**, 60—76.) Diese Quadrik bestimmt eine Cayleymetrik, die in erster Umgebung von P zur euklidischen wird.

(Die letztgenannte hat den Durchschnitt von Q und der Polarhyperebene von P in bezug auf Q zum Absolutgebilde.) Der Inbegriff dieser euklidischen Maßbestimmungen in allen Punkten P von X_n ist die Riemannsche Metrik, welche die wohlbekannte Riemannsche Übertragung erzeugt. Nun kann man eine projektive Konnexion bestimmen, welche 1. die Geodetischen mit der Riemannschen gemeinsam hat und 2. in welcher die Abbildung von infinitesimal benachbarten Räumen (nach Cartan) die korrespondierenden Quadriken ineinander überführt. Diese projektive Konnexion ist dann und nur dann eben, wenn die ursprüngliche Riemannsche konstante Krümmung hat, ein Resultat, welches nach den Beltrami-Cayleyschen Ergebnissen zu erwarten war.

Hlavatý (Praha).

Kawaguchi, Akitsugu: Die Differentialgeometrie in der verallgemeinerten Mannigfaltigkeit. Rend. Circ. mat. Palermo **56**, 245—276 (1932).

Längs einer Kurve $K(t)$ in einem n -dimensionalen Raume X_n sei ein Linienelement r -ter Ordnung $(x, dx, \dots, d^r x)$ gegeben. Bei der Koordinaten- und gleichzeitiger Parametertransformation transformiert sich der Tangentialvektor von K nach

$$\frac{d^* x^{\nu'}}{d^* t} = \alpha \frac{\partial^* x^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{dx^{\lambda}}{dt}, \quad \alpha = \frac{dt}{d^* t}.$$

Somit kann dieser Vektor als ein Pseudovektor der Klasse 1 angesehen werden. [Dieser Begriff und seine Konsequenzen für die Tensoranalysis wurden von Schouten und Hlavatý in „Zur Theorie der allgemeinen linearen Übertragung“ [Math. Z. **30**, 414 bis 432 (1929) eingeführt.] Ist nun $\overset{1}{U}$ eine lineare Übertragung mit den Koeffizienten

$$\overset{1}{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu}(x, dx), \quad \overset{1}{\Gamma}_{\mu}^{\nu}(x, dx), \text{ so gilt also für das kovariante Differential dieser Pseudogröße } \overset{1}{p} = \frac{dx}{dt} \quad \overset{2}{p}^{\nu} = \frac{d\overset{1}{p}^{\nu}}{dt} + \overset{1}{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu} \overset{1}{p}^{\mu} \overset{1}{p}^{\lambda} - \overset{1}{\Gamma}_{\mu}^{\nu} \overset{1}{p}^{\mu} \overset{1}{p}^{\nu} = \frac{d\overset{2}{p}^{\nu}}{dt}.$$

In dieser Weise fortfahrend, denkt man sich außer $\overset{1}{U}$ die Grundübertragungen $\overset{2}{U}, \dots, \overset{r}{U}$ gegeben mittels der Koeffizienten $\overset{s+1}{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu}$ und $\overset{s+1}{\Gamma}_{\mu}^{\nu}$, welche von $x, \overset{1}{p}, \dots, \overset{s+1}{p}$ abhängen, wo

$$\frac{d\overset{s}{p}^{\nu}}{dt} = \overset{s+1}{p}^{\nu} = \frac{d\overset{s}{p}^{\nu}}{dt} + \overset{s}{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu} \overset{s}{p}^{\mu} \overset{s}{p}^{\lambda} - \overset{s}{\Gamma}_{\mu}^{\nu} \overset{s}{p}^{\mu} \overset{s}{p}^{\nu}, \quad (s = 1, \dots, r-1)$$

Nun ordnet man jedem Punkte von X_n ein Linienelement r -ter Ordnung zu. Dann läßt sich aus den Grundübertragungen eine allgemeine Übertragung U konstruieren:

Die Koeffizienten $\overset{1}{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu}(x, \overset{1}{p}, \dots, \overset{r}{p})$ dieser Übertragung werden nach Absatz 2 des Referates über Kawaguchi „Theory of connections in the generalized Finsler manifold“ [Proc. Imp. Acad. (Tokyo) **7**, 211—214 (1931)] dies. Zbl. **2**, 158 konstruiert,

während sich die $\overset{1}{\Gamma}_{\mu}^{\nu}(x, \overset{1}{p}, \dots, \overset{r}{p})$ aus einem Pseudoskalar und seiner kovarianten Ableitung ergeben. — Danach werden die verschiedenen Eigenschaften der Krümmungs-

größen von $\overset{1}{U}, \dots, \overset{r}{U}$ und U untersucht und die Verallgemeinerungen von bekannten wichtigsten Identitäten angegeben (Riccische, Bianchische usw.). — Das Wichtigste und Interessanteste in dieser Arbeit ist wohl die Berechnung der Spezialfälle. Aus dem allgemeinen Ansatz folgen nämlich spezielle Geometrien, und zwar für $r=1$ die von Hosokawa [Sci. Rep. Tôhoku Imp. Univ., ser. I **19**, 37—51 (1930)], Berwald [z. B. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **34**, 213—220 (1925)], Synge [Trans. Amer. Math. Soc. **27**, 61—67 (1925)], Taylor [dto. **27**, 246—264 (1925)], während sich für $r=2$ die Craigsche Geometrie [Trans. Amer. Math. Soc. **33**, 125—142 (1931), siehe auch dies. Zbl. **1**, 167—168 (1931)] aus dem allgemeinen Ansatz ableiten läßt. Die Ursache des Tatbestandes, daß man alle diese Fälle auf einmal behandeln kann, liegt wohl in der Einführung der Pseudogrößen, die nötigenfalls die Existenz von $\overset{1}{\Gamma}_{\mu}$ erzwingen. — Bemerkung des Referenten: Die Koexistenz der Gleichung (3, 9) einerseits und der Gleichungen (3, 25) bis (3, 28) andererseits ist dem Referenten nicht ganz verständ-

lich. Wegen der Behandlung dieser letztgenannten Gleichungen siehe die oben erwähnte Arbeit von Schouten und mir. *Hlavatý (Prag).*

Topologie:

Fenchel, Werner: Elementare Beweise und Anwendungen einiger Fixpunktsätze. Mat. Tidsskr. B H. 3/4, 66—87 (1932).

Es werden die bekannten Sätze über die Existenz von Fixpunkten bei stetigen Abbildungen des Kreises, der projektiven Ebene und der Kugel elementar bewiesen. Das einzige Hilfsmittel bei den Beweisen ist der Begriff der Umlaufzahl einer stetigen Abbildung einer Kreislinie auf eine andere. Z. B. wird der Beweis, daß es auf der Kugel kein stetiges Tangentenfeld geben kann, indirekt geführt. Man nimmt die Existenz eines stetigen Tangentenfeldes an und betrachtet die Gesamtänderung $n\pi$ des Winkels, den die Feldtangente mit der Tangente eines Kreises C auf der Kugel einschließt, bei einmaliger Durchlaufung von C . Diese Gesamtänderung bleibt bei stetiger Abänderung von C erhalten und ergibt 2π , wenn man C in einen Punkt zusammenschrumpfen läßt, andererseits muß sie $= -n\pi$ sein, da C stetig in den entgegengesetzt durchlaufenen Kreis überführbar ist. Das ist ein Widerspruch. — Hieraus folgt unmittelbar, daß eine stetige Abbildung der projektiven Ebene auf sich mindestens einen Fixpunkt und eine stetige Abbildung der Kugelfläche wenigstens einen Fixpunkt oder einen Diametralpunkt besitzt. Als Anwendung des Fixpunktsatzes der projektiven Ebene ergibt sich der Satz von Tricomi: Besitzt ein innerer Punkt P der konvexen Hülle eines Körpers die Eigenschaft, daß die Schwerpunkte aller durch P gehenden ebenen Schnitte stetig von den Schnittebenen abhängen, so ist P selbst Schwerpunkt eines ebenen Schnittes. *H. Seifert (Dresden).*

Goeritz, Lebrecht: Die Heegard-Diagramme des Torus. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 9, 187—188 (1932).

Auf rein kombinatorischem Wege wird die Klassifikation derjenigen 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, deren Heegard-Diagramm auf einer Ringfläche liegt, von neuem abgeleitet. *H. Seifert (Dresden).*

Haratomi, Keitaro: On a topological problem. Jap. J. Math. 9, 103—110 (1932).

Ist I das Intervall $0 \leq x \leq 1$, so bezeichnen Borsuk und Ulam mit $I(n)$ den Raum aller ungeordneten n -Tupel x_1, x_2, \dots, x_n mit $x_v \in I$ (Bull. Amer. Math. Soc. 37, 875; vgl. dies. Zbl. 3, 224), beweisen, daß $I(n)$ nur für $n = 1, 2, 3$ mit einer Teilmenge des euklidischen R_n homöomorph ist, und fragen, ob $I(n)$ für $n \geq 4$ mit einer Teilmenge des R_{n+1} homöomorph ist. Verf. bestätigt dies für $n = 4$. *Nöbeling (Wien).*

● **Menger, Karl: Kurventheorie.** Hrsg. unter Mitarbeit v. Georg Nöbeling. (Mengen-theoret. Geometrie in Einzeldarstell. Hrsg. v. Karl Menger. Bd. 2.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1932. VI, 375 S. RM. 22.—.

Das Buch bringt eine einheitliche und zusammenfassende Darstellung der an die Menger-Urysohn'sche Kurvendefinition anknüpfenden Kurventheorie. Zur Orientierung über den Inhalt seien die Kapitelüberschriften mit kurzen Inhaltsangaben angeführt. I. Die alten Kurvenbegriffe. Besprechung der Begriffe: eindeutiges Streckenbild, stetiges Streckenbild, topologisches Streckenbild (= Bogen), irreduzibles Kontinuum, gewöhnliche Kurve (= Summe endlich vieler Bogen, die paarweise höchstens Endpunkte gemein haben) und Nachweis, daß sie sich sämtlich nicht zur Definition des Begriffes „Kurve“ eignen. Begriff der Cantorschen Kurve (= ebenes Kontinuum ohne Teilquadrat); ebene Universalkurve. II. Der neue Kurvenbegriff. Die Menger-Urysohn'sche Kurvendefinition; ihre topologische Invarianz; in der Ebene stimmt sie mit der Cantorschen Definition überein. III. Die Verzweigungsordnung der Kurvenpunkte. Rationale und irrationale, reguläre und irreguläre Punkte einer Menge; Punkte n -ter Ordnung, Punkte der Ordnung ω, \aleph_0, c ; Endpunkte, gewöhnliche Punkte, Verzweigungspunkte. Schwach und stark irrationale Kurven. Zerlegungspunkte und lokale Zerlegungspunkte. IV. Über die Summe von Kurven. Die Summe von abzählbar vielen (rational) eindimensionalen abgeschlossenen Mengen ist (rational) eindimensional. Beispiel zweier regulärer Kurven, deren Summe nicht regulär ist. V. Zerlegungs-, Trennungs- und Deformationseigenschaften von Kurven. VI. Das Fundamentaltheorem über den kurventheoretischen Ordnungsbegriff. Beweis des n -Beinsatzes: In einem im kleinen zusammenhängenden Kontinuum ist jeder Punkt n -ter (bzw. un-

endlicher) Ordnung Scheitel eines n -Beines (bzw. ∞ -Beines). VII. Über erblichen Zusammenhang im kleinen. Verschiedene Kennzeichnungen der erblich im kleinen zusammenhängenden Kontinua; Beziehungen dieses Begriffes zu dem der rationalen und regulären Kurve. VIII. Die regulären Kurven. Beständig reguläre Kurven. Charakterisierung der gewöhnlichen Kurven, der Kurven zweiter Ordnung, der Bogen durch die Verzweigungsordnung ihrer Punkte. Der Teil zweiter Ordnung der Kontinua. Beispiel einer Kurve, deren sämtliche Punkte die Ordnung ω haben. IX. Die rationalen Kurven. Die Begriffe: Geschlecht, Typus. X. Die Baumkurven. Kennzeichnungen und Struktur der Bäume; Fixpunktsatz; Universalbäume; Bäume im kleinen. XI. Die zyklischen Kontinua. Ihre Kennzeichnung unter den im kleinen zusammenhängenden Kontinua. Maximalbogenverknüpfte und maximalzyklische Teilkontinua. Zerlegung der im kleinen zusammenhängenden Kontinua in zyklische Elemente. XII. Die Universalkurve. — Am Schlusse werden die wichtigsten kurventheoretischen Begriffe zusammengestellt und ihre Umfangsbeziehungen in einer graphischen Darstellung veranschaulicht. Ferner wird ein Überblick über die Hauptsätze der Theorie der Kurven und der Kontinua gegeben, und es werden einige noch ungelöste Probleme angegeben. — Das Buch setzt nur geringe Vorkenntnisse voraus und führt den Leser schnell und sicher durch alle Teile dieses jungen und fruchtbaren Forschungsgebietes. *H. Hahn.*

Wilder, R. L.: Point sets in three and higher dimensions and their investigation by means of a unified analysis situs. Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 649—692 (1932).

Angesichts der in den letzten Jahren (etwa um 1925—1926) entstandenen „synthetischen“ oder „unitären“ Richtung in der Topologie, welche den Gegensatz zwischen der mengentheoretischen und der kombinatorischen Topologie als überholt betrachtet und ihn deshalb zu beseitigen sucht, stellt sich der Verf. in seiner sehr klar und anregend gehaltenen Darstellung (die einen an der Amer. Math. Soc. gehaltenen „Symposium-Vortrag“ wiedergibt) folgende Ziele: 1. den Standpunkt zu verteidigen, daß es in der Mathematik nur ein Gebiet gibt, welches als Analysis Situs oder Topologie zu bezeichnen ist, während das, was unter „mengentheoretischer“ bzw. „kombinatorischer“ Topologie verstanden wird, in Wirklichkeit zwei Methoden sind, die zur Bewältigung des Stoffes der topologischen Untersuchung dienen; 2. zu berichten über die neueren Fortschritte in der mehrdimensionalen Topologie und zu zeigen, daß bei diesen Fortschritten die Tendenz der Vereinigung der mengentheoretischen und der kombinatorischen Untersuchungsmethoden klar zutage tritt. Nachdem die charakteristischen Züge der mengentheoretischen und kombinatorischen Richtung sehr kurz, aber klar und prägnant zusammengestellt sind (bei welcher Gelegenheit man die durchgeführte Definition der Homologie, der Bettischen Zahlen modulo 2 usw. findet, ebenso wie die Formulierung des Verschlingungsbegriffes und des Alexanderschen Dualitätssatzes), wird eine kurze historische Entwicklung der Topologie von Riemann und Poincaré bis zur Gegenwart gegeben. Dabei wird betont, daß die Bettischen Zahlen nicht nur von Betti, sondern auch von Riemann (Fragment zur Analysis Situs) entdeckt wurden. Andererseits wird die Rolle von Schoenflies als des Vorgängers der „unitären“ Methode in der Topologie hervorgehoben. Bei der Übersicht der neuesten topologischen Ergebnisse verdient die vom Verf. herrührende Umkehrung des Jordanschen Satzes im R^3 besonders hervorgehoben zu werden. Sie lautet wie folgt: Eine beschränkte abgeschlossene Menge F des R^3 ist dann und nur dann eine geschlossene Fläche, wenn a) die Menge F den R^3 zerlegt und als gemeinsame Grenze ihrer Komplementärgebiete auftritt, b) die erste Bettische Zahl von $R^3 - F$ endlich und c) jedes Komplementärgebiet zu F gleichmäßig im Kleinen zusammenhängend ist. [Vgl. wegen des Beweises R. L. Wilder, Trans. Amer. Math. Soc. **32**, 632—657 (1930) und Bull. Amer. Math. Soc. **36**, 219 (1930) u. **37**, 519 (1931).] Ferner enthält die Arbeit einen Bericht über die Zyklen und Berandungen in kompakten Räumen mit Anwendungen auf Zerlegungen und Verschlingungen im R^n (mit den zugehörigen Invarianz- und Additionssätzen). Nach einer Übersicht der verschiedenen Einbettungssätze schließt Verf. seine Darstellung mit einem kurzen Bericht über die neueren dimensionstheoretischen Untersuchungen [Alexandroff, Math. Ann. **106**; Pontrjagin C. R. Acad. Sci., Paris **190**, 1105 bis 1107 (1930)].

P. Alexandroff (Moskau).

Hurewicz, W.: Über die henkelfreien Kontinua. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **35**, 1077—1078 (1932).

L'auteur appelle continu brouwerien tout continu localement connexe (c.-à-d. image continue du segment rectiligne) uniohérent (c.-à-d. tel qu' en le décomposant en deux sous-continus, leur partie commune est toujours connexe) et démontre le théorème remarquable suivant: tout espace métrique séparable de dimension $n \geq 3$ est topologiquement contenu (c.-à-d. homéomorphe à un ensemble contenu) dans un continu brouwerien de la même dimension. Pour $n = 1$ ce théorème ne subsiste pas, les continus brouweriens 1-dimensionnels ne contenant pas d'images homéomorphes de la circonférence. Pour $n = 2$ la question reste ouverte. La surface du tore p. ex. (que l'auteur propose à l'examen), augmentée d'un disque méridional à l'intérieur et du disque équatorial à l'extérieur, constitue un continu brouwerien. Enfin, le problème suivant est posé: est-il vrai que tout continu brouwerien (à un nombre arbitraire des dimensions) est image d'une décomposition semicontinue (au sens de R. L. Moore) de la sphère 3-dimensionnelle en parties connexes?

B. Knaster (Warszawa).

Blumenthal, Leonard M.: Concerning regular pseudo d -cyclic sets. Amer. J. Math. **54**, 729—738 (1932).

Verf. beweist: Eine mindestens fünfpunktige, pseudo- d -zyklische Menge, die kein Quadrupel enthält, von dem jeder Punkt zwischen je 2 der 3 anderen liegt, ist gleichseitig (d. h. je 2 Punkte haben gleichen Abstand). Zur Terminologie vgl. dies. Zbl. **4**, 464.

Nöbeling (Wien).

Aumann, Georg: Eine Bemerkung über Zerlegungsräume. Jber. Deutsch. Math.-Verein. **42**, 180—182 (1932).

Es werden die verschiedenen Definitionen eines Zerlegungsraumes (Alexandroff, Math. Ann. **96**, 557; Aumann, Math. Ann. **106**, 249 u. f.; Baer u. Levi, Math. Z. **34**, 110) systematisiert und in Verbindung gesetzt mit der zugehörigen Definition der Stetigkeit einer Zerlegung.

P. Alexandroff (Moskau).

Haratomi, Keitaro: Über höherstufige Separabilität und Kompaktheit. II. Jap. J. Math. **9**, 1—18 (1932).

Weiterführung und Ergänzung der Untersuchungen des ersten Teils (vgl. dies. Zbl. **4**, 371).

Reinhold Baer (Halle a. S.).

Kreines, M.: Zur Konstruktion der Poincaré-Räume. Rend. Circ. mat. Palermo **56**, 277—280 (1932).

Einfache Konstruktion einer dreidimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeit, deren Bettische Gruppen denjenigen eines dreidimensionalen sphärischen Raumes isomorph sind, obwohl die Mannigfaltigkeit dem sphärischen Raum nicht homöomorph ist.

P. Alexandroff (Moskau).

Mechanik.

Price, G. Baley: A class of dynamical systems on surfaces of revolution. Amer. J. Math. **54**, 753—768 (1932).

Die allgemeinen Birkhoffschen Untersuchungen über Schnittflächen, Flächen-transformationen, Rotationszahlen und periodische Lösungen von der Poincaréschen „zweiten Sorte“ bei dynamischen Systemen mit zwei Freiheitsgraden sind von Birkhoff zuerst auf das restringierte Dreikörperproblem angewandt worden, das ein derart schwieriges Problem ist, daß man die Resultate der Theorie nicht mit expliziten Formeln verifizieren oder sonst direkt überblicken kann. Zum Teil analog ist die Situation bei den Untersuchungen über rekurrente Bewegungen. Der Verf. stellt sich daher die Aufgabe, ein konkretes dynamisches Problem zu untersuchen, das, ohne allzu einfach zu sein, eine formelmäßige Verfolgung der Ergebnisse der erwähnten allgemeinen Theorien gestattet. Er wählt dazu die Bewegung eines Aufpunktes auf einer Rotationsfläche vom Geschlechte Eins (oder Null) unter dem Einfluß eines Potentials, das dieselbe Rotationssymmetrie wie die Fläche aufweist. Der Ref. bemerkt, daß ein Spezialfall

dieses integrierbaren Modells, wobei das Potential konstant und die Meridiankurve eine Traktrix, also die Fläche von konstanter negativer Krümmung ist, auf Grund der elliptischen Modulfigur bereits von G. Herglotz vorgeschlagen und seitdem verschiedentlich [E. Artin, *Abh. math. Semin. Hamburg. Univ.* **3** (1924); P. J. Myrberg, *Ann. Acad. Sci. Fennicae* **23** (1925); J. Nielsen, *Mat. Tidsskr.* (1925)] behandelt wurde, allerdings nur als Illustration der Ergodenhypothese und nicht der obenerwähnten allgemeinen Methoden der neueren Dynamik. Letzteres wird nun von dem Verf. bei seinem allgemeineren Modell auf elegante Weise durchgeführt. Von den Einzelresultaten sei nur erwähnt, daß eine Reihe von Sätzen, die Birkhoff in dem letzten Teil seiner Arbeit [*Rend. Circ. mat. Palermo* **39** (1915)] für das restringierte Dreikörperproblem bewiesen hat, auch im Falle des vorliegenden Modells gilt, daß ferner über die Rotationszahlen und den rekurrenten Charakter der in Frage stehenden Bewegungen arithmetisch scharfe Aussagen hergeleitet werden. *Wintner* (Baltimore).

Coe, Carl Jenness: Exterior motion in the restricted problem of three bodies. *Trans. Amer. Math. Soc.* **34**, 811—837 (1932).

Der Verf. bezeichnet eine Hillsche Nullgeschwindigkeitskurve $2\Omega(x, y) = C$ des restringierten Dreikörperproblems als ein äußeres Oval, wenn $2\Omega(x, y) - C$ innerhalb des Ovals negativ, außerhalb des Ovals positiv ist. Betrachtet werden Bewegungen, die außerhalb eines solchen Ovals erfolgen, wobei die Ovalkonstante C mit der Jacobischen Konstanten der fraglichen Bewegung übereinstimmt. Die Hauptresultate des Verf. gruppieren sich um den Satz, daß dann die synodische Bahnkurve unendlich viele synodisch retrograde Umläufe um die beiden auf Ruhe transformierten Massen besitzen muß. Kann der Aufpunkt keiner der beiden Massen beliebig nahe kommen, so gibt es außerdem in dem siderischen Achsenkreuz unendlich viele siderisch direkte Umläufe um die beiden gleichmäßig rotierenden Massen. Über die gegenseitige Beziehung der Winkelvariablen der retrograden und der direkten Bewegungen werden einige sehr einfache Sätze hergeleitet. Es werden ferner gewisse Bedingungen angegeben, die hinreichend sind dafür, daß der Aufpunkt mit unbegrenzt wachsender Zeit monoton ins Unendliche rückt; diese Kriterien liefern Bahnen von hyperbolischem Charakter, d. h. mit positiver Geschwindigkeit im Unendlichen [vgl. hierzu B. O. Koopman, *Trans. Amer. Math. Soc.* **29** (1927)]. Endlich wird eine elementare Regel für den Umlaufssinn der Spitzen hergeleitet, die eine äußere Bahn in Punkten der Nullgeschwindigkeitskurve, sofern diese erreicht wird, stets besitzt. Diese Regel ist gewissermaßen die Übertragung der Strömgrenschen Schleifenregel [E. Strömgren, *Astron. Nachr.* **174** (1907)] auf den Fall, daß nicht das Äußere, sondern das Innere des Ovals das verbotene Gebiet ist. *Wintner* (Baltimore).

MacMillan, W. D., and Walter Bartky: Permanent configurations in the problem of four bodies. *Trans. Amer. Math. Soc.* **34**, 838—875 (1932).

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Bestimmung derjenigen Lösungen des ebenen Vierkörperproblems, bei welchen die vier Körper mit einer und derselben, und zwar konstanten Drehgeschwindigkeit in Kreisen um den Schwerpunkt rotieren, also sich wie die Eckpunkte eines gleichmäßig rotierenden starren Vierecks verhalten. Durch die Starrheitsbedingung und die Konstanz der Drehgeschwindigkeit verwandeln sich die Bewegungsgleichungen unmittelbar in algebraische Bedingungen, die zwischen den Seitenlängen und den Winkelkosinussen des Vierecks bestehen. Die Aufgabe besteht dann in der Bestimmung der Fälle, in welchen diese dynamisch gewonnenen Bedingungen geometrisch verträglich sind, was an sich elementare, aber ins einzelne gehende Diskussionen erfordert, und zwar vor allem deshalb, weil in die Bedingungsgleichungen auch die Massen eingehen, die als positive Größen herauskommen müssen. Bei diesen elementargeometrischen Diskussionen wird der Natur der Sache nach der Fall eines konvexen Vierecks von dem Fall eines Vierecks mit einer einspringenden Ecke gesondert behandelt (dieser zweite Fall wird von den Konfigurationen des ersten Falles durch evtl. Dreieckslösungen des Vierkörperproblems getrennt). Die Resultate dieser

ausführlichen Diskussionen, die mit Diagrammen und numerischen Tafeln illustriert werden, können hier nicht detailliert werden. Am Schluß der Arbeit werden gewisse Trapezlösungen berechnet und die benachbarten permanenten Lösungen bestimmt.

Wintner (Baltimore).

Elastizitätstheorie:

Papcovitch, P.: Expressions générales des composantes des tensions, ne renfermant comme fonctions arbitraires que des fonctions harmoniques. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 754—756 (1932).

Dans une note antérieure (ce Zbl. 5, 226), l'auteur a exprimé la solution générale des équations de la théorie d'élasticité au moyen de trois fonctions harmoniques. L'auteur généralise maintenant ses formules antérieures en introduisant une quatrième fonction harmonique et calcule les expressions pour les six composantes des tensions. Dans le cas d'absence des forces de volume la solution peut être réduite à celle de Galerkin.

V. Fock (Leningrad).

Volterra, Enrico: Perturbazione prodotta da più sfere rigide in un mezzo elastico in equilibrio. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 13, 32—37 (1931).

Der Verf. untersucht den Einfluß, den ein bzw. mehrere starre, kugelförmige Kerne auf ein sie vollkommen umgebendes elastisches Medium ausüben. Dazu wird die Analogie benutzt, die zwischen den Theorien der Elastizitätslehre und denen der Elektrizitätslehre besteht. Hierbei entsprechen die starren Kerne elektrischen Konduktoren, das elastische Medium dem nichtleitenden Medium, in das die Konduktoren eingetaucht sind. Der Einfluß, den eine bzw. beliebig viele starre Kugeln auf eine homogene Deformation des elastischen Mediums ausüben (Störung), wird berechnet durch die Angabe der Verschiebungskomponenten.

J. J. Sommer (München).

Sadowsky, Michael A.: Distribution of pressure concentrated on a small surface. Trans. Amer. Soc. Mech. Engr. 54, 221—224 (1932).

Ein starrer Stempel wird gegen die ursprünglich ebene Oberfläche eines elastischen Materials gedrückt. Ermittelt wird einerseits bei gegebener Stempelform (unter Beschränkung auf ebene Druckflächen) die in der Berührungsfläche resultierende Druckverteilung, andererseits die zur Erzielung einer vorgegebenen (speziell als gleichförmig vorausgesetzten) Druckverteilung erforderliche Stempelform, und zwar bei beiden Problemstellungen sowohl für rotationssymmetrische Stempel als auch für den Fall, daß bei rechteckigem Stempelquerschnitt das Seitenlängenverhältnis sehr groß (Schermesser) bzw. sehr klein (Schneide) ist. Vorangestellt sind die erhaltenen Formelresultate, deren Ableitung in einem mathematischen Anhang skizziert wird.

Harry Schmidt.

Cornock, A. F.: A simple numerical method for the treatment of elastic stability questions and similar „characteristic value“ problems. Philos. Mag., VII. s. 14, 881—896 (1932).

Das in der technischen Mechanik unter dem Namen Vianellos bekannte Iterationsverfahren zur Bestimmung von Eigenwerten wird ohne Bezugnahme auf Vianello dargestellt.

Prager (Göttingen).

Galerkin, B.: Solution générale du problème de l'équilibre élastique d'un cylindre circulaire creux et d'une partie du cylindre. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 858—860 (1932).

Es werden allgemeine Formeln für die Spannungen und Formänderungen eines hohlen Kreiszyllinders mitgeteilt, der durch beliebig vorgegebene Spannungen auf seiner äußeren und inneren Oberfläche und auf zwei senkrecht zur Zylinderachse verlaufenden Endquerschnitten beansprucht wird.

Prager (Göttingen).

L'Hermite, Robert: Pièces rectangulaires planes de faible épaisseur soumises à des pressions périphériques situées dans leur plan. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 941—943 (1932).

Der Spannungszustand einer an ihren Rändern durch Normalkräfte belasteten ebenen Scheibe wird mit Hilfe einer Spannungsfunktion berechnet.

W. Flügge.

Schmidt, Alfred: Beitrag zur Festigkeit der Systeme mit gebogenen Balken. Werft, Reederei, Hafen 13, 347—351 (1932).

Berechnet wird eine schwach zylindrisch gewölbte Rechteckplatte, die längs einer Mittellinie durch einen flachen Zweigelenkbogen unterstützt wird. Die Platte wird zur Berechnung ihrer Formänderung in Parallelstreifen zerlegt, Drillungs- und Querbiegemomente nicht berücksichtigt. W. Flügge (Göttingen).

Goens, E.: Über die Biegungs- und Drillungsschwingungen eines dünnen kreiszylindrischen Kristallstabes von beliebiger kristallographischer Orientierung. Ann. Physik, V. F. 15, 455—484 (1932).

Es wird die Theorie der Biegungs- und Drillungsschwingungen eines dünnen kreiszylindrischen Kristallstabes beliebiger Orientierung aufgestellt, welcher an beiden Enden gleiche und gleichartig orientierte Zusatzmassen trägt. Die gefundenen Näherungsausdrücke werden zur Berechnung des Torsionsmoduls aus der Drillungsgrundschwingung des Stabes mit Zusatzmassen und zur Berechnung des Elastizitätsmoduls aus den Biegungsschwingungen erster und zweiter Ordnung des Stabes ohne Zusatzmassen verwendet und mit experimentellen Ergebnissen verglichen. Prager (Göttingen).

Teofilato, Pietro: Un limite superiore dei periodi propri di vibrazione. Atti Pontif. Accad. Sci. Nuovi Lincei 85, 309—319 (1932).

Verf. berechnet die Eigenschwingungen eines frei aufliegenden Balkens. Die Lösung der Differentialgleichung $\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} E \cdot J \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ wird in eine unendliche Reihe von der Form: $y(x, t) = \sum_k q_k(t) f_k(x)$ entwickelt und durch die Diskussion dieser Lösung, insbesondere aus den Eigenschaften der Fkt. $f(x)$, das Resultat: $T_{\max} < 5,15 \cdot A_0 l^2 \sqrt{\frac{\rho_0}{E}}$ abgeleitet, wo T die lebendige Kraft, A_0 Koeffizient der Entwicklung und die übrigen Buchstaben leicht erkennbare Bedeutung haben. J. J. Sommer (München).

Wit, A. N. P. de: Die Minimum-Materialverteilung in einer symmetrischen Fachwerkbrücke auf drei Stützpunkten. Ingenieur 1932, B 261—B 273 [Holländisch].

Aero- und Hydromechanik:

● Thalau, K., und A. Teichmann: Aufgaben aus der Flugzeugstatik. Berlin: Julius Springer 1933. XI, 345 S. u. 291 Abb. RM. 26.50.

Eisner, F.: Reibungswiderstand. (Hamburg, Sitzg. v. 18.—19. V. 1932.) Veröff. d. Votr. u. Erörterungen d. Konferenz üb. hydromech. Probl. d. Schiffsantriebs 1—49 (1932).

Da es sich hier schon um ein zusammenfassendes Referat handelt, ist eine nochmalige kürzere Zusammenfassung kaum angängig. Mit der bei dem Verf. gewohnten Gründlichkeit wird die umfangreiche Literatur etwa der letzten 10 Jahre gesichtet und besprochen, wobei im Mittelpunkt die Frage steht, welchen Anteil der Reibungswiderstand am Gesamtwiderstand bewegter Körper hat. Ferner z. B. die Frage, wie weit die an Platten teils empirisch, teils theoretisch ermittelten Ergebnisse und Begriffsbildungen auf die wirklichen gekrümmten Oberflächen übertragen werden können; dabei hat der Verf. hauptsächlich die Anwendung auf den Schiffbau im Auge.

F. Noether (Breslau).

Kármán, Th. v.: Theorie des Reibungswiderstandes. (Hamburg, Sitzg. v. 18.—19. V. 1932.) Veröff. d. Votr. u. Erörterungen d. Konferenz üb. hydromech. Probl. d. Schiffsantriebs 50—73 (1932).

Zu diesem Bericht ist Ähnliches zu sagen, wie zu dem vorstehend ref. mit dem Unterschied, daß die theoretischen Gesichtspunkte noch mehr im Vordergrund stehen. Der Unterschied zwischen laminarer und turbulenter Grenzschicht steht daher hier im Mittelpunkt der Erörterungen.

F. Noether (Breslau).

Riabouchinsky, D.: Sur l'analogie hydraulique des mouvements d'un fluide compressible. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 998—999 (1932).

Die vom Verf. hervorgehobene Analogie besteht darin, daß man von der bekannten, für zweidimensionale Strömungen einer kompressiblen Flüssigkeit geltenden Beziehung

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left\{ 1 - \frac{\kappa - 1}{2} \frac{q^2}{c_0^2} \right\}^{\frac{1}{\kappa - 1}}$$

(ϱ, q = Dichte bzw. Geschwindigkeit in bel. Punkt; ϱ_0, c_0 = Dichte bzw. Schallgeschwindigkeit für $q = 0$; $\kappa = c_p/c_0 = 2$ bzw. 1,41 für Wasser bzw. Luft) zu der hydraulischen Relation

$$\frac{h}{h_0} = 1 - \frac{1}{2} \frac{q^2}{c_0^2}$$

($h_0 = [h]_{q=0}$ und $c_0^2 = gh_0$ das Quadrat der Wellengeschwindigkeit in der Tiefe h_0) durch $\varrho/\varrho_0 = h/h_0$ und $\kappa = 2$ gelangt. Kurze Bemerkungen über eine experimentelle Untersuchung dieser Analogie sowie über verschiedene Anwendungsmöglichkeiten beschließen die Note.

Harry Schmidt (Köthen).

Quarleri, Angelo: Sulla scia creata in un liquido perfetto da una lamina con profilo poligonale di $2n$ lati e caso limite per $n \rightarrow \infty$. Atti Pontif. Accad. Sci. Nuovi Lincei 85, 248—256 (1932).

Quantentheorie.

Hylleraas, Egil A.: Die Grundlagen der Quantenmechanik mit Anwendungen auf atomtheoretische Ein- und Mehrelektronenprobleme. Skr. norske Vid.-Akad., Oslo Nr 6, 1—142 (1932).

Die Arbeit gibt in ihren allgemeinen Kapiteln (1 bis 7) eine umfassende Darstellung der gesamten Wellen- und Quantenmechanik, mit ausführlicher Behandlung der allgemeinen Grundlagen der Theorie in sehr eleganter und durchsichtiger Darstellung, und mit gleichmäßiger Berücksichtigung sowohl der wellenmechanischen als auch der matrizenmechanischen Methode sowie endlich der statistischen Transformationstheorie. Das 6. Kapitel bringt als Erläuterungen eine Reihe von einfachen Anwendungen der Matrizenmethode (harmonischer Oszillator; Drehimpulsquantelung und anschließende Probleme, Zeemaneffekte, Elektronenspin, Balmerformel). Das 7. Kapitel behandelt die Diracsche relativistische Elektronengleichung und die daraus sich ergebende relativistische Feinstrukturformel. Endlich enthält das 8. Kapitel eine systematische Darstellung der (hauptsächlich vom Verf. selbst durchgeführten) Untersuchungen betreffs der numerischen wellenmechanischen Bestimmung von Termen einfacher Mehrkörperprobleme: H^- , He , Li^+ , Be^{++} , B^{+++} , C^{++++} ; H_2^+ ; H_2 ; und Gitterenergie des LiH . — Kapitelübersicht: 1. Die Phasenwellen de Broglies. 2. Die Wellenmechanik von Schrödinger. 3. Die Matrizenmechanik von Heisenberg. 4. Die symbolische Methode von Dirac und die Dirac-Jordansche Transformationstheorie. 5. Bewegungsgleichungen und Quantenbedingungen in der symbolischen Algebra. Zusammenhang mit der Matrizen- und Wellenmechanik. 6. Elementare Anwendungen der Quantenmechanik. 7. Relativistische Quantenmechanik. 8. Anwendungen auf Mehrkörperprobleme.

P. Jordan (Rostock).

● **George, André:** Mécanique quantique et causalité d'après M. Fermi. Avec remarques de Louis de Broglie. (Actualités scient. et industr. Vol. 38. Exposés de physiques théorique. Publiés de Louis de Broglie. Vol. 5.) Paris: Hermann & Cie. 1932. 18 S. Frs. 6.—.

Im wesentlichen ein Referat über eine Abhandlung von E. Fermi; von den Methoden und Begriffen der Wellenmechanik aus werden an Hand einfacher Betrachtungen und Beispiele die bekannten prinzipiellen Aussagen der Quantenmechanik (Meßbarkeit, Ungenauigkeitsregeln, Indeterminismus) erläutert.

P. Jordan (Rostock).

Broglie, Louis de: Sur le champ électromagnétique de l'onde lumineuse. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 862—864 (1932).

Bemerkungen betreffs des Versuches, den aus Diracfunktionen $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ (welche einer Diracgleichung mit Ruhmasse Null genügen sollen) in bekannter Weise zu bildenden Sechservektor als elektromagnetischen Sechservektor zu deuten.

P. Jordan (Rostock).

● **Destouches, Jean-Louis:** État actuel de la théorie du neutron. (Actualités scient. et industr. Vol. 33. Exposés de physique théorique. Publiés de Louis de Broglie. Vol. 3.) Paris: Hermann & Cie. 1932. 68 S. u. 2 Taf. Frs. 18.—.

Nach einer ausführlichen und sehr vollständigen historischen Übersicht über die Entwicklung der Idee eines Neutrons (= ungeladener Kern der Masse 1) werden die Experimente (ebenfalls in historischer Reihenfolge) dargelegt, die anscheinend die Existenz eines solchen Neutrons beweisen. Dann werden verschiedene Modelle des Neutrons betrachtet. Den quantitativen Berechnungen wird für das Potential der Ausdruck $e/r \cdot \exp(-kr)$ zugrunde gelegt. Auf Grund der Bornschen Stoßtheorie werden dann Ausdrücke für die Streuung, Absorption und Ionisation berechnet. Aus den erhaltenen Formeln wird dann durch Vergleich mit den Experimenten der Koeffizient k abzuschätzen versucht. Die Ionisationswahrscheinlichkeit durch ein Neutron ergibt sich, wie zu erwarten war, als vernachlässigbar klein. *Sezl* (Wien).

Gapon, E. N.: Zur Theorie des Atomkerns. Z. Physik 79, 676—681 (1932).

Unter der Voraussetzung, daß ein Atomkern gerader Ordnungszahl nur aus α -Teilchen und Neutronen aufgebaut ist, wird versucht, aus den empirisch bekannten Massendefekten den mittleren Anteil der Packungsenergie zu berechnen, welcher auf ein einzelnes Neutron bzw. α -Teilchen entfällt. Ferner wird der systematische Aufbau der leichten Kerne unter der angegebenen Voraussetzung diskutiert. *G. Beck* (Prag).

Perrin, Francis: Vie moyenne des noyaux atomiques activés. Cas probables d'impossibilité d'émission γ . C. R. Acad. Sci., Paris 195, 775—778 (1932).

Der Verf. behandelt die Frage der Übergangswahrscheinlichkeit bei der γ -Strahlung von Atomkernen. Er geht aus von einer bei Delbrück und Gamow (vgl. dies. Zbl. 3, 35) zitierten Bemerkung von Bohr, daß bei Schwingungen von Kerngebilden das elektrische Dipolmoment der Schwingung sehr erheblich reduziert werden kann, wenn der elektrische Schwerpunkt sehr nahe mit dem Massenschwerpunkt zusammenfällt. Verf. berechnet, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten, die, wenn α -Teilchen oder Protonen als Träger der Schwingung angesehen werden, bei Energien der Größenordnung von 1 Million Voltelektron etwa die Größenordnung von $2 \cdot 10^{-15} \text{ sec}^{-1}$ haben dadurch nicht unerheblich reduziert werden können, wenn als Träger ein α -Teilchen oder Proton oder auch ein an ein schweres Kernteilchen, z. B. an ein Neutron, fest gebundenes Elektron angesehen wird. Für die γ -Strahlen von Ra C' z. B. reduziert sich die Übergangswahrscheinlichkeit ca. um einen Faktor 20, wenn sie einem angeregten α -Teilchen, um einen Faktor 5, wenn sie einem angeregten Neutron zugeschrieben wird. Ferner bemerkt der Verf., daß Kerne, die, wie die leichten Kerne vom Atomgewicht $4n$ und $4n + 2$ bis zum Ca, keine γ -Strahlung als Dipolstrahlung emittieren können, also alle Anregungszustände dieser Kerne metastabil gegen Dipolstrahlung sein müssen. (Quadrupolstrahlung wird möglich, wenn die Wellenlänge der γ -Strahlung von der Größenordnung der Kerndimensionen wird.) Bei den Kernen dieses Typs, die nur aus α -Teilchen oder aus diesen und dem H² (Demihelium) bestehen, haben alle Teile des Kerns das gleich e/m , so daß der Ladungsschwerpunkt immer mit dem Massenschwerpunkt zusammenfällt. *Houtermans* (Berlin).

Hulme, H. R.: The internal conversion coefficient for radium C. Proc. Roy. Soc. London A 138, 643—664 (1932).

Verf. berechnet nach einer störungstheoretischen Methode die Koeffizienten der „inneren Absorption“ von γ -Strahlung in der K-Schale des Atoms. Dabei wird als Wechselwirkung zwischen dem Kern und den K-Elektronen ein im Kernmittelpunkt

sitzender strahlender Dipol angenommen. Frühere Berechnungen nach der Schrödingerschen Gleichung (Fowler, Swirles) sowie von Casimir, der die asymptotische Darstellung der Eigenfunktionen benutzt hatte, hatten die inneren Umwandlungskoeffizienten etwa um einen Faktor 10 kleiner gefunden, als den experimentellen Ergebnissen entsprach, so daß man genötigt war, für die innere Umwandlung von γ -Energie in Energie der Schalelektronen einen neuen Mechanismus („collisional“ oder „infernal“ conversion) anzunehmen. Der Verf. rechnet mit den richtigen Werten der Eigenfunktionen und für Energien zwischen 0,5 und 3 Mill. Elektronvolt. Er findet für eine Reihe von Linien des Ra C, die von Ellis und Aston gemessen wurden, recht gute Übereinstimmung mit den Experimenten. Einige Werte bei Linien des Ra C sowie die beim Ra B fallen jedoch deutlich aus der Kurve heraus und sind wesentlich größer, als theoretisch auf Grund von Dipolstrahlung zu erwarten. (Über diese vgl. nachstehendes Referat.) Der Verf. schließt, daß es sich bei den übereinstimmenden Linien tatsächlich um Dipolstrahlung handelt, wobei sich das Kernmoment um 1 ändert. Die bekannte Linie des Ra C bei $14,26 \cdot 10^5$ Volt, deren innerer Umwandlungskoeffizient nahezu 1 beträgt (die sonstigen sind von der Größenordnung von 10^{-3} bis 10^{-2}), fügt sich keiner der Kurven ein und läßt sich nur als Sprung von $j = 0$ nach $j' = 0$ erklären. *Houtermans.*

Taylor, H. M., and N. F. Mott: A theory of the internal conversion of γ -rays. Proc. Roy. Soc. London A **138**, 665—695 (1932).

Die Verff. berechnen die Koeffizienten der inneren Umwandlung von Energie der γ -Strahlung in Energie von Schalelektronen (Absorption im eigenen Atom) für Quadrupolstrahlung des Atomkerns nach der gleichen Methode, die Hulme (vgl. vorstehendes Referat) für Dipolstrahlung anwendet. Sie finden, daß die Punkte, die den Linien von Ra C entsprechen und aus der für Dipolstrahlung gültigen theoretischen Kurve herausfallen, sich gut der theoretischen Kurve für Quadrupolstrahlung einpassen. Ebenso ergibt sich gute Übereinstimmung für die — ebenfalls von Ellis und Aston gemessenen — Linien des Ra B, wobei der Absolutwert zwar nicht so gut stimmt, während der Gang mit der Energie mit dem theoretischen übereinstimmt. Die Verff. schließen, daß es sich bei all diesen Linien um Quadrupolübergänge handelt, bei denen sich das Kernmoment um Null oder um mehr als Eins ändert. *Houtermans (Berlin).*

McDougall, J.: The calculation of the terms of the optical spectrum of an atom with one series electron. Proc. Roy. Soc. London A **138**, 550—579 (1932).

Diese sehr interessante Arbeit liefert einen wesentlichen Beitrag zur numerischen Berechnung der optischen Terme nach den Methoden von Hartree, Slater und Fock. Das reichhaltige numerische Material bezieht sich auf das Spektrum des dreifach ionisierten Siliziums (Si^{+++}). Die Wellenfunktionen der einzelnen Elektronen werden nach der Hartreeschen Methode berechnet. Dabei werden auch die Hartreeschen Energieparameter ermittelt, welche die Termwerte ohne Austausch darstellen und, wie vom Verf. gezeigt wird, für Si^{+++} um höchstens 7% von den beobachteten Werten abweichen. Dann werden die aus der Slaterschen Theorie folgenden Formeln für die Energiewerte entwickelt und die entsprechenden Korrekturen berechnet; die Abweichung von den beobachteten Werten wird dadurch auf höchstens 1% herabgedrückt. — Im wesentlichen reduziert sich die vom Verf. angewandte Methode auf die Benutzung der Hartreeschen Wellenfunktionen und des Fockschen Ausdrucks für die Energie [V. Fock, Z. Physik **62**, 795 (1930)]. — Zum Schluß wird die Vermutung ausgesprochen, daß die noch verbleibende Abweichung durch Anwendung der Fockschen Wellenfunktionen noch weiter herabgedrückt werden kann. *V. Fock (Leningrad).*

Davidson, P. M.: Rotational uncoupling, with application to the singlet hydrogen bands. Proc. Roy. Soc. London A **138**, 580—593 (1932).

Es wird die Theorie der L -Entkoppelung, wie sie schon früher für das Molekül He_2 entwickelt worden ist, an die besonderen, bei dem Molekül H_2 auftretenden Verhältnisse (großer Entkoppelungsgrad, kleine Werte der Schwingungs- und Rotationsquantenzahlen) angepaßt. Die Störungstheorie wird zunächst, ähnlich wie bei He_2 , unter der

Annahme formuliert, daß nur die Rotationsniveaus desselben Schwingungsniveaus in einem bestimmten Elektronenzustande einander beeinflussen. Daraufhin wird auch auf die Frage der Wechselwirkung verschiedener Schwingungsniveaus eingegangen. Die Ergebnisse werden auf die Lage der Rotationsniveaus von $3d^1\Sigma$, $3d^1\Pi$, $3d^1\Delta$, $4d^1\Sigma$, $4d^1\Pi$, $4d^1\Delta$, sowie auf die Intensitäten der Übergänge von diesen Niveaus nach $2p^1\Sigma$ und $2p^1\Pi$ angewandt. Im allgemeinen erhält man eine ziemlich gute Übereinstimmung. Die Abweichungen dürften darauf beruhen, daß bei H_2 die L -Entkoppelung besonders groß ist.

R. de L. Kronig (Groningen).

Beutler, H.: Die Spektren und Bindungsfestigkeiten „innerer“ Elektronen bei Molekülen. *Naturwiss.* 1932, 759.

Fermi, E.: Sulle bande di oscillazione e rotazione dell'ammoniaca. *Nuovo Cimento*, N. s. 9, 277—283 (1932).

Lo sdoppiamento dei livelli dell'ammoniaca dovuta alla riflessione dell'azoto rispetto al piano dei tre idrogeni è influenzato dalla rotazione della molecola. L'effetto viene studiato quantitativemente und confrontato coi risultati sperimentali con i quali si trova in accordo.

Autoreferat.

Woods, H. J.: The energy of the ground state of methane. *Trans. Faraday Soc.* 28, 877—885 (1932).

Mit Hilfe der Eigenfunktionen der vier äußeren Elektronen im C-Atom und der vier H-Elektronen wird nach dem Slaterschen Verfahren die Energie des Grundzustandes der CH_4 -Molekel ausgerechnet. Das „Coulombsche“ Integral macht hier etwa die Hälfte der Bindungsenergie aus (im Gegensatz zum H_2); das Austauschintegral zwischen einem H-Elektron und der ihm entgegengestreckten Eigenfunktion eines C-Elektrons schafft ebensoviel. Die anderen Austauschintegrale geben kleine Korrekturen.

F. Hund (Leipzig).

Heitler, W.: Halbklassische Theorie der chemischen Bindung. *Z. Physik* 79, 143 bis 152 (1932).

Es werden die Voraussetzungen gemacht, unter denen die chemische Wechselwirkung von Atomen sich ausdrücken läßt durch die Zahl ihrer äußeren Elektronen und durch je ein Austauschintegral pro Atompaar (London-Heitlersches Modell der chemischen Bindung). Die möglichen Bindungszustände eines gegebenen Systems von Atomen sind dann Linearkombinationen von Zuständen, die sich durch Valenzstriche bezeichnen lassen. Die Frage nach den möglichen Bindungszuständen und nach dem energetisch tiefsten läßt sich als ein Eigenwertproblem formulieren, bei dem die Valenzstrichzahlen als Operatoren auftreten. Diese Theorie wird zu einer „klassischen“ Theorie vereinfacht, indem nicht vertauschbare Operatoren als vertauschbar behandelt werden. Die Bewegungsgleichungen geben dann an, wie ein durch Valenzstrichzahlen (die jetzt nicht ganzzahlig zu sein brauchen) bezeichneter Zustand sich zeitlich ändert. Wichtig sind die zeitlich konstanten Lösungen dieser Gleichungen. Für ihre Energie erhält man einen Ausdruck, der sich in einfacher Weise aus den Austauschintegralen der Atompaare zusammensetzt.

F. Hund (Leipzig).

Falkenhagen, H., und W. Fischer: Zur elektrostatischen Theorie der Frequenzabhängigkeit der Ionenbeweglichkeiten und der Dielektrizitätskonstanten in gemischten Lösungen starker Elektrolyte. I. Allgemeine Theorie. *Physik. Z.* 33, 941—945 (1932).

Die bisher nur für einfache Elektrolyte durchgeführte Debye-Falkenhagensche Theorie [*Physik. Z.* 29, 401 (1928)] der Dispersion der Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstanten verdünnter Lösungen starker Elektrolyte wird auf beliebige Mischungen erweitert; die allgemeine Lösung wird angegeben. Der Vergleich mit experimentellen Ergebnissen wird einer weiteren Mitteilung vorbehalten.

E. Hückel (Stuttgart).

Schumann, W. O.: Stromleitung in einem Dielektrikum, in dem nur eine Ionenart beweglich ist. *Z. Physik* 79, 532—549 (1932).

Es wird angenommen, daß in dem betrachteten Dielektrikum die Ionen der einen Sorte vollkommen unbeweglich, die der anderen Sorte wie Elektrolytionen beweglich

sein sollen. An die beiden Endflächen einer aus einem solchen Dielektrikum bestehenden Platte können durch Metallelektroden beliebige Spannungen (Gleich- oder Wechselspannungen) angelegt oder auch die Elektroden kurzgeschlossen werden. Von den Elektroden sollen keine neuen Ionen nachgeliefert werden. Untersucht wird die zeitliche Abhängigkeit des Stromes durch die Platte, und zwar bei verschiedener Wahl der angelegten Spannungen durch die Diskussion der das Problem beherrschenden einfachen Differentialgleichungen.

Fürth (Prag).

Kollath, R.: Der Einfluß der Winkelverteilung gestreuter Elektronen auf die Messung des Wirkungsquerschnittes. Ann. Physik, V. F. **15**, 485—515 (1932).

In Teil I dieser Arbeit diskutiert Verf. den Einfluß der Anordnung und Größe der Strahlblenden auf die Wirkungsquerschnittsmessungen bei vorgegebener Winkelverteilung für die Ramsauer (R-) Methode. In Teil II wird zunächst der Zusammenhang der mittels der R-Methode einerseits, der Townsend (T-) Methode (Diffusion von Elektronen im elektrischen Felde) andererseits ermittelten Wirkungsquerschnitte formuliert. Wesentlich hierbei ist die Winkelverteilung der Streuelektronen, die aus den Ramsauer-Kollathschen Messungen [Ann. Physik **9**, 756; **10**, 143 (1931); **12**, 529, 837 (1932)] entnommen wird, und die Geschwindigkeitsverteilung der Diffusionselektronen, die einfachheitshalber als Maxwell'sch angesetzt wurde. Bei ihrer Berücksichtigung stimmen die aufeinander umgerechneten Wirkungsquerschnitte aus der R- und T-Methode im großen und ganzen befriedigend überein — bis auf die absolute Größe. [Zum Vergleich zwischen R- und T-Methode s. auch M. Didlauskis, Z. Physik **77**, 352 (1932); dies. Zbl. **5**, 383.] Schließlich wird aus dem Vergleich der mittels der R- und T-Methode erhaltenen Wirkungsquerschnitte unterhalb 1 Volt auf die Winkelverteilung der Streuelektronen in diesem Geschwindigkeitsbereich, für den direkte Messungen noch nicht vorliegen, geschlossen. Es ergibt sich, daß für die allerkleinsten Geschwindigkeiten — ebenso wie für die höheren Geschwindigkeiten — eine starke Vorwärtstreuung (Streuwinkel $< 90^\circ$) stattfinden sollte.

Guth (Wien).

Goldstein, L.: Sur la théorie quantique de la diffusion des électrons. C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 864—866 (1932).

Allgemeine Betrachtungen über die Abseparierung der Schwerpunktsbewegung beim Zusammenstoß von Elektronen mit H-ähnlichen Atomen unter Zugrundelegung der Born-Diracschen Stoßtheorie.

Guth (Wien).

Goldstein, L.: Sur la conservation de la quantité de mouvement dans les processus de chocs d'électrons. C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 999—1002 (1932).

Verf. schreibt die Erhaltung des Drehimpulses beim Zusammenstoß von Elektronen mit H-ähnlichen Atomen im Rahmen der Born-Diracschen Störungstheorie explizite auf.

Guth (Wien).

Klassische Theorie der Elektrizität.

Graffi, D.: Alcune applicazioni del teorema di reciprocità della radiotelegrafia. Nuovo Cimento, N. s. **9**, 251—258 (1932).

Nach einer allgemeinen Behandlung des Sommerfeldschen Reziprozitätstheorems, nebst einer einfachen Ableitung aus Maxwell's Gleichungen, wendet Verf. diesen Satz an zum Studium der Strahlung horizontaler elektrischer Antennen. Nachdem auf Grund des Reziprozitätstheorems gezeigt ist, daß eine Horizontalantenne auf der (unendlich gut leitend angenommenen) Erde nicht strahlt, wird die Azimutrichtungscharakteristik einer solchen Antenne abgeleitet. Die Ergebnisse waren bekannt.

M. J. O. Strutt.

Witt, A.: Sur l'amorçage des oscillations de très haute fréquence. C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 1005—1007 (1932).

Es handelt sich um die Aufstellung von Anlaufbedingungen der möglichen Elektronenschwingungen in einer Zweielektrodenröhre mit in Serie geschaltetem äußeren Schwingungskreis. Bei Vernachlässigung der Raumladung (was im betrachteten Sättigungsgebiet zulässig erscheint) wird die Differentialgleichung des Diodenstromes aufgestellt und die Stabilität der Lösung in der üblichen Weise untersucht. Für die instabilen Intervalle (in unendlicher ab-

zählbarer Zahl) ergeben sich so Relationen zwischen der Schwingungsfrequenz, der äußeren Spannung, der Diodenweglänge und den Elektronenkonstanten, Relationen, welche auf die Barkhausen-Formel hindeuten. Es wird erwähnt, daß der (praktisch wichtige) Fall einer Dreielektrodenröhre in ähnlicher Weise behandelt werden kann. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Murray, F. H.: Asymptotic dipole expansions for small horizontal angles. Proc. Cambridge Philos. Soc. **28**, 433—441 (1932).

In dieser Arbeit handelt es sich um die Berechnung des Sommerfeldschen Integrales:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_0^{(1)}(\tau r) e^{-i w \tau} d\tau}{k_2^2 l + k_1^2 m},$$

$l^2 = \tau^2 - k_1^2$; $m^2 = \tau^2 - k_2^2$; $w = h + z$; h = Dipolhöhe über $z = 0$. Dieses Integral ist gleich der Summe von drei: 1. Schleife um k_1 ; 2. Schleife um k_2 ; 3. Schleife um $\tau^2 = k_1^2 k_2^2 (k_1^2 + k_2^2) = s^2$. Es werden nur die Beiträge 1. und 2. betrachtet, wobei Sommerfelds Näherung: $k_2 - s \cong k_2 - k_1$ vermieden wird. *M. J. O. Strutt*.

Takamura, Satoru: The radio receiver characteristics related to the side-band coefficient of the resonance circuit. Proc. Inst. Radio Engr. **20**, 1774—1801 (1932).

In Radioempfängern wirkt auf die Resonanzkreise immer ein modulierte Signal ein. Die bisherige Berechnungsweise begnügte sich damit, ein nicht modulierte Signal zu betrachten. Verf. zeigt, daß es für die Beurteilung der Trennschärfe und der Klangtreue nützlich ist mit einem modulierten Signal zu rechnen. Die Rechenergebnisse werden mit Messungen verglichen. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Arnold, John W., and Roland C. Taylor: Linearly tapered loaded transmission lines. Proc. Inst. Radio Engr. **20**, 1811—1817 (1932).

Näherungsformeln für Eingangswiderstände und Dämpfung von Leitungen, in denen Induktivität und Widerstand pro Längeneinheit lineare Funktionen des Abstands vom Leitungsanfang sind. *Cauer* (Göttingen).

Bubenik, Vaclav: Sur la théorie des filtres électriques. C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 1002—1004 (1932).

Formeln für Kettenleiter mit gleichen Gliedern. *Cauer* (Göttingen).

Marino, A.: Teorema sulle reti elettriche passive. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **13**, 66—71 (1931).

Beweis eines von G. A. Campbell in Bell Syst. Techn. J., Juli 1922, erwähnten Netzumwandlungssatzes, der eine Verallgemeinerung der Umwandlung von Stern in Dreieck darstellt. *Cauer* (Göttingen).

Rimini, Cesare: Circuito equivalente ad un sistema di due circuiti accoppiati induttivamente. Nuovo Cimento, N. s. **9**, 240—250 (1932).

Ersatzschaltung eines Vierpoles mit zwei unabhängigen Stromkreisen. *Cauer*.

Wassmann, H.: Über das Verhalten von Wellenfiltern bei Belastung durch gesättigte Eisendrosseln. Arch. Elektrotechn. **26**, 745—754 (1932).

Unter Annahme eines Zusammenhanges zwischen Strom i und Fluß Φ der Drossel, gegeben durch

$$i = a \sin b \Phi,$$

und Beschränkung auf eine einzige Oberwelle gelingt es, Oberwellenstrom und -spannung in der Belastungsdrossel analytisch zu berechnen für den Fall einer kleinen Oberwelle und graphisch für bedeutende Oberwelle. Experimente stützen das Rechnungsergebnis.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie.

Trautz, Max: Die Reibung, Wärmeleitung und Diffusion in Gasmischungen. XXI. Absoluter η -Wirkungsquerschnitt, molekulartheoretische Bedeutung der kritischen Temperatur und Berechnung kritischer Drucke aus η . Ann. Physik, V. F. **15**, 198—218 (1932).

This paper criticizes previous discussions of molecular diameters (σ) derived from gaseous viscosities (η), and their comparison with diameters derived from the equation

of state. The author states that, according to recent experimental work, the temperature relation $\eta \sim f(T)$ — where $f(T)$ is T^n for molecules that repel with the force μr^{-s} at the distance r (where $n - \frac{1}{2} = 2/(s - 1)$), and $T^{1/2}/(1 + C/T)$ for Sutherland molecules — takes the Maxwellian form $\eta \sim T$ (corresponding to $s = 5$) near the critical temperature T_k , over a range of T that increases with T_k . Taking $\sigma^{s-1} = \mu/\{RT(s-1)\}$, he calculates σ from η_k at T_k , taking $s = 5$, and calls σ_k , thus calculated, the Maxwell-diameter of the molecule. He finds that σ_k^3 is closely proportional to σ^3 as calculated for $T = T_k$ by van Laar (Die Zustandsgleichung der Gase; Voss. 1924) from the equation of state, the former being about 15.86 times the latter. He finds also that there are remarkably accurate integer relations between the values of σ_k for the gases He, Ne, Ar, Kr, X. The values of σ at T_k calculated from Sutherland's formula are smaller than σ_k in the ratio 0.85; the practice of calculating σ for $T = \infty$ from Sutherland's formula is criticized because $f(T)$ does not tend to $T^{\frac{1}{2}}$ as $T \rightarrow \infty$, as Sutherland's formula implies. The author states that σ cannot be calculated from the formula $\eta = aT^n$ ($\frac{1}{2} < n < 1$) because the numerical constants in the theoretical formula (given by Chapman and Enskog) have not been calculated for $s \neq 5$; this is a misapprehension [cf. S. Chapman, Mem. Manch. Lit. and Phil. Soc. 16, No. 1, (1922)]. The paper includes a large table of values of σ_k . The paper is of considerable physical interest, but the author's application of Maxwell's formula at $T = T_k$ seems of doubtful validity, since this formula takes no account of the attractive force existing between molecules at certain distances, as shown by the work of Lennard-Jones.

S. Chapman (London).

Zernike, F.: Die Brownsche Grenze für Beobachtungsreihen. Z. Physik 79, 516 bis 528 (1932).

Die Brownsche Bewegung eines Meßinstrumentes, z. B. eines Galvanometers, bedingt, daß eine Einzelmessung die zu messende GröÙe nur mit einer beschränkten Genauigkeit bestimmt. Um die Genauigkeit zu steigern, kann man entweder eine endliche Zahl von Einzelmessungen machen und aus ihnen das Mittel bilden, oder man kann von dem Instrument eine Registrierkurve aufzeichnen lassen und von ihr das Integral über ein gewisses Zeitintervall auswerten, oder man kann schließlich ein Instrument verwenden, dessen Angaben bereits das erwähnte Integral darstellen (Fluxmeter). Als Maß der so erreichbaren Genauigkeit wird die „Ergiebigkeit“ $E = \overline{x^2}/S\varepsilon^2$ der betreffenden Beobachtungsmethode eingeführt, worin $\overline{x^2}$ das mittlere Fehlerquadrat der Einzelmessung, ε^2 das der Summe aus den Einzelmessungen und S die Zeitdauer der Gesamtmessung bedeuten. Die Berechnung von E erfolgt nach einer Methode von Ornstein unter Berücksichtigung der gegenseitigen Korrelation der Einzelbeobachtungen, und zwar für periodische und aperiodische Galvanometer und bei der kontinuierlichen und diskontinuierlichen Beobachtungsmethode. Es zeigt sich, daß E cet. par. am größten ist für die Integrationsmethode und daß hier die Genauigkeit durch Verkleinerung der Dämpfung und der Schwingungsdauer beliebig gesteigert werden kann. Für die anderen Methoden werden die Ergiebigkeiten relativ zu der ersteren ermittelt und eingehend diskutiert. Für das mittlere Fehlerquadrat der Stromstärkemessung nach der Integrationsmethode ergibt sich die Formel $\overline{i^2} = 2kT/wS$, worin k die Boltzmannsche Konstante, T die abs. Temperatur, w den Widerstand des Galvanometersystems und S die Beobachtungszeit bedeuten.

Fürth (Prag).

Kimball, W. S., and W. J. King: Theory of heat conduction and convection from tall hot vertical cylinders and high walls at uniform temperature. Philos. Mag., VII. s. 14, 570—591 (1932).

For tall vertical hot bodies the authors lay down the new empirical law that above the limiting height Y (beyond which turbulence is presumably established), the rate of heat transfer is constant and equal to the average rate of heat transfer below this limiting height. The isothermal surface at half temperature drop between vertical

hot body and ambient fluid, is then the boundary of a film of constant thickness which coincides with the Langmuir film. If d is the thickness of this film and $T_1 - T_0 = \tau$ the temperature excess, the heat flux is $q = K\tau/d$. For the actual half temperature drop, with constant temperature gradient within the film, the heat flux that can be accounted for by conduction is $q_c = K\tau/2d$. The other half of the heat transferred is presumably due to some mechanism of heat transfer involved in turbulence. — The empirical expression $T = T_1 - ax(1 + be^{-ay})$ for temperature at the hot wall reduces for $y > Y$ to $T = T_1 - ax$ and the heat transfer by conduction is

$$q_c = -K \frac{dT}{dx} = Ka = h_c \tau.$$

The total heat flow per unit width and height L is expressed by a formula in which τ appears to the power $5/4$. Heat transfer coefficients are proportional to the square root of the pressure and to $\tau^{1/4}$, and increase notably when the cylinder diameter becomes smaller than 6 cm. The thickness of the film varies as $\tau^{-1/4}$, and checks the numerical experimental value.

H. Bateman (Pasadena).

Eisenschütz, R.: Über mehrphasige Gleichgewichte in Systemen, die durch Membranen unterteilt sind. Z. physik. Chem. A **162**, 216–222 (1932).

Für Systeme mit halb- oder undurchlässigen Membranen wird eine verallgemeinerte Phasenregel aufgestellt. Der Betrachtung wird ein System zugrunde gelegt, das ein konstantes Volumen erfüllt, einen konstanten Energieinhalt besitzt und aus α Komponenten besteht. Der Raum, den das System erfüllt, ist durch Membranen in γ „Kammern“ geteilt. Die Membranen sind starr, aber energiedurchlässig; für die Komponenten sind sie teils durchlässig, teils undurchlässig, so daß für jede Komponente „abgeschlossene Raumteile“, die eine oder mehrere Kammern umfassen, entstehen. Für die Komponente i mögen $\varepsilon(i)$ solcher abgeschlossener Raumteile vorhanden sein. Innerhalb jeder Kammer können sich die Komponenten auf mehrere Phasen verteilen, deren Gesamtzahl β sei. Es ergibt sich, daß die Zahl der Freiheitsgrade F eines solchen Systems bestimmt ist durch: $F = 1 + \gamma + \sum_i \varepsilon(i) - \beta$. Beim Fehlen

von Membranen [$\gamma = 1$, $\varepsilon(i) = 1$] geht diese Gleichung in die gewöhnliche Form der Phasenregel $F = 2 + \alpha - \beta$ über.

H. Ulich (Rostock).

Butler, J. A. V.: The thermodynamics of the surfaces of solutions. Proc. roy. Soc. Lond. A **135**, 348–375 (1932).

Auf Grund der Annahme, daß die Diskontinuität der Oberfläche nicht tiefer als eine Molekelschicht reicht, wird die Gleichgewichtsbedingung an der Oberfläche abgeleitet, woraus sich ein Ausdruck für die Oberflächenspannung als Funktion der thermodynamischen Potentiale und damit der Aktivitäten der Bestandteile ergibt. Ist die spezifische Fläche des Gelösten gleich der des Lösungsmittels, so hat man eine der Szyszkowskischen ähnliche Gleichung zwischen Konzentration und Oberflächenspannung. Sie wird erfüllt für wässrige Lösungen von Phenol, Butylalkohol und Buttersäure. Ist die spezifische Fläche des Gelösten doppelt so groß als die des Lösungsmittels, dann erhält man eine andere Gleichung, welche für Resorzin, Hydrochinon und verschiedene Diäthylester gültig ist. Die Traubesche Regel wird aus der Theorie auch abgeleitet. Ebenso ergibt sich der Einfluß der Temperatur und des Drucks. Gemant.

Pöschl, G.: Berechnung der Oberflächentemperaturen geometrisch einfacher Körper bei Abkühlung oder Erwärmung für den Bereich der Isolierstoffe. Z. angew. Math. Mech. **12**, 280–287 (1932).

When a plate of uniform temperature θ_c is suddenly plunged into a medium of constant temperature zero the surface temperature θ_0 at time t may be calculated by a formula given by Gröber but it is advantageous to first throw the formula into the form

$$\theta = \theta_c 2hX \sum_0 \frac{e^{-\delta^2 \frac{a^2}{X^2}}}{\delta^2 + hX(1 + hX)}$$

where X is the thickness of the plate, $h = \alpha/\lambda$, $a = \lambda/c\gamma$ and the quantities δ are the roots of the transcendental equation $\delta \tan \delta = hX$. In these equations α denotes the heat transfer number, λ the thermal conductivity, a the thermometric conductivity, c the specific heat, and γ the specific weight. A method of computation is explained and an estimate is given for the remainder in the series, use being made of the integral-logarithm. Some numerical results are given and formulae suitable for computation are derived also from Gröber's solutions for corresponding problems relating to the cylinder and sphere.

H. Bateman (Pasadena).

Geophysik.

Jung, Karl: Die Randwertaufgabe der Geodäsie und die Bestimmung der Geoid-undulationen aus Schweremessungen. Gerlands Beitr. Geophys. **37**, 233–251 (1932).

Polemik gegen eine Reihe von Veröffentlichungen Hopfners. Ausgehend von einer im Endlichen gelegenen Niveaufläche des Potentialwertes Null sucht der Verf. nachzuweisen, daß die erste und zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie keine eindeutigen Lösungen zulassen, wenn sowohl im Außenraum als auch im Innenraum der Fläche Massen vorgegeben sind. Sodann befaßt sich der Verf. mit der Entwicklung des Raumpotentials nach Kugelfunktionen und sucht Hopfner eine Reihe von Fehlern und Trugschlüssen nachzuweisen. Schließlich wird ein Verfahren zur Bestimmung des Geoids entwickelt. Durch Verlegung der über das Geoid hinaustretenden Massen in seinen Innenraum wird die Aufgabe auf eine zweite Randwertaufgabe für den Außenraum zurückgeführt, deren Lösung mit Hilfe des von Hopfner vorgeschlagenen Ansatzes erreicht wird.

Hopfner (Wien).

Störmer, Carl: How the horseshoe-formed auroral curtains can be explained by the corpuscular theory. Terrestr. Magnet. Atmosph. Electr. **37**, 375–388 (1932).

Verf. hatte schon früher darauf hingewiesen, daß das Zustandekommen der charakteristischen Formen des Nordlichts, wie Bögen, Bänder und Draperien, im Rahmen seiner korpuskularen Theorie plausibel gemacht werden kann. In vorliegender Arbeit beschäftigt sich Verf. mit der Deutung insbesondere der hufeisenförmigen Draperien. Zunächst wird ein kurzer Abriß der Theorie der Bahnen von Elektronen oder anderen geladenen Teilchen im Felde eines magnetischen Dipols gegeben. Die durch Einführung von Zylinderkoordinaten abseparierte Bewegung in der $r - z$ -Ebene wird sodann mechanisch interpretiert, womit das Übersehen der typischen Bahnformen erleichtert erscheint. Für verschiedene Werte der den Bahntypus bestimmenden Integrationskonstante der Störmerschen Theorie werden die Bahn-Bündel von Elektronen derselben Geschwindigkeit auf Grund numerischer Rechnungen graphisch dargestellt. Bei geeigneter Wahl dieser Integrationskonstanten ergibt sich nach Verf. u. a. auch eine Deutung der hufeisenförmigen Draperien, die allenfalls eine beachtenswerte Arbeitshypothese darstelle. — Das erdmagnetische Feld wird hier durch einen Dipol schematisiert.

Guth (Wien).

Whipple, F. J. W.: On potential gradient and the air-earth current. Terrestr. Magnet. Atmosph. Electr. **37**, 355–359 (1932).

Zweck der Arbeit ist die Untersuchung der Beziehung zwischen der elektrischen Feldstärke F an der Erdoberfläche, der Leitfähigkeit λ der unteren Luftschichten und der Stromdichte i des Stromes Luft-Erde. Die Leitfähigkeiten für positive und für negative Ionen seien λ_1 bzw. λ_2 . Die experimentellen Ergebnisse der Kew Observatory führen Verf. zu der Beziehung $i = \lambda_1 F$, während gewöhnlich $i = (\lambda_1 + \lambda_2) F$ angenommen wird. Verf. meint nun, daß die letztere Beziehung unrichtig ist, weil die Größe $(\lambda_1 + \lambda_2) F$ nur den einen Teil des Stromes darstellt, dem ein Konvektionsstrom $k \frac{\partial \varrho}{\partial z}$ addiert werden muß (ϱ Ladungsdichte). Nach Verf. gilt also

$$i = (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial V}{\partial z} + k \frac{\partial \varrho}{\partial z}; \quad \varrho = -\frac{1}{4\pi A} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

wo $k \sim 10^4 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$ ist. Aus $\frac{\partial i}{\partial z} = 0$ ergibt sich, falls $\lambda_1 + \lambda_2$ als von z unabhängig betrachtet wird, eine Differentialgleichung für V . Im Einklang mit $i = \lambda_1 F$ setzt Verf. als Grenzbedingung $i = \lambda_1 \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_0$ an. Dann wird

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{i}{\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)} (\lambda_1 + \lambda_2 e^{-z/a}); \quad a = \sqrt{\frac{k}{4\pi A(\lambda_1 + \lambda_2)}} \sim 30 \text{ m}.$$

Durch diese Gleichung wird die Erklärung gegeben, warum die Leitfähigkeit in größeren Höhen gleich $\lambda_1 + \lambda_2$ und an der Erdoberfläche gleich λ_1 anzusetzen ist. *V. Fock.*

Kolhörster, Werner: Untersuchungen zum vertikalen Zählrohreffekt der Höhenstrahlung. *Naturwiss.* 1932, 895—899.

Bartels, J.: Kurzer Überblick über die Physik der hohen Atmosphäre. (8. Dtsch. Physiker- u. Math.-Tag, Bad Nauheim, Sitzg. v. 22.—24. IX. 1932.) *Z. techn. Physik* 13, 611—616 (1932).

Malurkar, S. L.: Effect of radiation on surfaces of humidity discontinuity. *Gerlands Beitr. Geophys.* 37, 410—415 (1932).

Ausgehend von der Temperaturverteilungskurve mit der Höhe in einer ruhenden Atmosphäre wird die Wirkung der Strahlung rein theoretisch behandelt. Es werden dann sowohl Diskontinuitäten von Temperatur, Feuchtigkeit und anderen absorbierenden Stoffen in der Atmosphäre an Grenzflächen und in ihrer Umgebung, als auch Änderungen, die sich in einer verschiedenen Neigung der Verteilungskurve mit der Höhe bemerkbar machen, exakt mathematisch diskutiert. *Hänsch (Aachen).*

Kleinschmidt, E.: Zur Anwendung der Statistik in der Meteorologie. *Z. angew. Meteorol.* 49, 353—359 (1932).

Arakawa, H., and M. Sanuki: On the diffusion of vorticity in a viscous fluid and the Okada's law. *Geophys. Mag.* 4, 61—66 (1931).

Vor über 30 Jahren fand Okada durch Untersuchung zahlreicher Zyklonen und Antizyklonen über Japan das Gesetz, daß sich gleichsinnig rotierende Wirbel einander nähern und entgegengesetzt rotierende Wirbel voneinander entfernen, ein Resultat, das vielfach angezweifelt wurde, da es den Folgerungen der hydrodynamischen Theorie über die Bewegung von Wirbeln in idealen Flüssigkeiten direkt widerspricht. Arakawa und Sanuki zeigen nun, daß Okadas Gesetz trotzdem zu Recht besteht, indem es sich aus den Bewegungsgleichungen zäher Flüssigkeiten deduzieren läßt. Aus der Bewegungsgleichung inkompressibler zäher Flüssigkeiten:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad}\left(\Phi + \frac{p}{\rho}\right) + \nu \Delta \mathbf{v}$$

folgt nämlich für $\zeta = \text{rot}_z \mathbf{v}$ (z = vertikale Koordinate) die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu \cdot \Delta \zeta,$$

deren von Terazawa [*Jap. J. Physics* 1 (1922)] für die Anfangsbedingungen:

$t = 0, \quad \zeta = \zeta_0 \quad \text{für } s < a, \quad \zeta = 0 \quad \text{für } s > a, \quad s = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$
(kreisförmige Wirbelquelle mit dem Mittelpunkt x_1, y_1 und dem Radius a) angegebene Lösung lautet:

$$\zeta = \zeta_0 \left\{ 1 - e^{-\frac{a^2 + s^2}{4\nu t}} \sum_0^{\infty} \left(\frac{s}{a} \right)^m J_m \left(\frac{as}{2\nu t} \right) \right\}, \quad s < a,$$

$$\zeta = \zeta_0 e^{-\frac{a^2 + s^2}{4\nu t}} \sum_1^{\infty} \left(\frac{a}{s} \right)^m J_m \left(\frac{as}{2\nu t} \right), \quad s > a.$$

In der hieraus für den Fall zweier kreisförmiger Wirbelquellen mit den Radien a_1, a_2 , und den Mittelpunkten x_1, y_1, x_2, y_2 durch Superposition entstehenden Lösung ist dann Okadas Gesetz enthalten. — Die graphische Darstellung von zwei durchgerech-

neten Beispielen zeigt, daß die Tendenz zur Annäherung gleichsinnig rotierender Wirbel deutlicher in Erscheinung tritt als die Tendenz zur Entfernung zweier entgegengesetzt rotierender Wirbel, was gleichfalls mit den Beobachtungen übereinstimmt. *Ertel*.

Arakawa, H.: A further investigation on the diffusion of vorticity. *Geophys. Mag.* 4, 113—116 (1931).

Der von Arakawa u. Sanuki (vgl. vorst. Referat) theoretisch begründete Okada'sche Satz über die Anziehung (Abstoßung) gleichsinnig (ungleichsinnig) rotierender Wirbel in reibenden Flüssigkeiten ohne Grundströmung wird hier auch für die einer (konstanten) Grundströmung U überlagerten Wirbel ($\zeta = \text{rot}_z v$) bewiesen, indem die Gleichung

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \eta \Delta \zeta$$

durch die Galilei-Transformation $x' = x - U \cdot t$, $y' = y$ auf

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \eta \Delta' \zeta$$

reduziert wird, aus der Okada's Satz abgeleitet werden kann. *Ertel* (Potsdam).

Arakawa, H.: On the movement of cyclonic and anticyclonic centres. *Geophys. Mag.* 4, 117—123 (1931).

Indem das innere Gebiet einer Zyklone bzw. Antizyklone durch $v_z = c \cdot z$ (v = Windgeschwindigkeit, z = vertikale Koordinate, c = Konstante ≥ 0) und das äußere Gebiet durch $v_z = 0$ charakterisiert wird, zeigt Verf., daß die Abweichung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Störungsgebilde von der allgemeinen Drift, in der sie eingelagert sind, vorwiegend durch c und durch die Verteilung von $\text{rot } v$ bestimmt ist.

Ertel (Potsdam).

Arakawa, H.: Über die intermittierenden Oszillationen des atmosphärischen Drucks. *Geophys. Mag.* 4, 171—176 (1931).

Ein Versuch, einige in Mikrobarogrammen von Tokio aufgetretene intermittierende Luftdruckoszillationen als Schwebungsphänomene von Grenzflächenwellen an einer atmosphärischen Diskontinuitätsfläche zu erklären.

Ertel (Potsdam).

Arakawa, H.: Seiches of viscous water. *Geophys. Mag.* 5, 37—48 (1932).

Verf. behandelt die Frage des Einflusses der inneren Reibung auf Wasserwellen bis auf geringe Modifikationen in engem Anschluß an H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik (2. deutsche Ausgabe, 1931, S. 708ff.), jedoch für endliche Tiefe. Die Bewegung ist fast wirbelfrei, der Dämpfungsfaktor $\lambda^2 : 8\pi \nu^2$, wobei $\rho \nu$ den Viskositätskoeffizienten der inkompressiblen Flüssigkeit darstellt. Die allgemeine Lösung wird für den Fall freier Schwingungen in einem rechteckigen, kreisförmigen und ringförmigen Becken konstanter Tiefe spezialisiert, wobei stets ν als klein vorausgesetzt wird. Die konträre Annahme eines sehr großen ν führt auf eine Gleichung 3. Grades, deren einzige reelle Wurzel eine aperiodische Bewegung vermittelt, während die beiden anderen eine rasch verschwindende Schwingung liefern.

K. Ledersteger (Wien).

Arakawa, H.: Solar radiation and conduction of heat in lake water. *Geophys. Mag.* 5, 49—55 (1932).

Arakawa, H.: The effect of the atmosphere on water-waves. *Geophys. Mag.* 5, 57—61 (1932).

Arakawa, H.: The effects of topography on the direction and velocity of wind. *Geophys. Mag.* 5, 63—68 (1932).

Mit Hilfe des Modells einer Potentialströmung um einen horizontal gelagerten, unendlich langen Kreiszylinder (Radius = a) wird die Beeinflussung des Windes durch einen Bergrücken und durch ein Tal untersucht. Bildet im ungestörten Feld (Ebene) die Windgeschwindigkeit U mit der Zylinderachse (y) den Winkel

$$\pi/2 - \lambda_0 \quad (U_x = U \cos \lambda_0, U_y = U \sin \lambda_0, U_z = 0),$$

so ist das Geschwindigkeitspotential

$$\Phi = U \cos \lambda_0 \cdot x \cdot \left(1 + \frac{a^2}{x^2 + z^2}\right) + U \sin \lambda_0 \cdot y,$$

und die Gleichung der Stromlinien in der zur Zylinderachse orthogonalen x, z -Ebene wird

$$U \cos \lambda_0 \cdot z \cdot \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + z^2}\right) = \text{konst.},$$

so daß eine über der Ebene in der Höhe $z = h$ verlaufende Stromlinie über dem Bergrücken ($x = 0, z = a$) in der Höhe $z_0 = \frac{h}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4}}$ liegt, wo die Geschwindigkeitskomponenten durch

$$u = U \cdot \cos \lambda_0 \cdot \left(1 + \frac{a^2}{z_0^2}\right), \quad v = U \sin \lambda_0, \quad w = 0$$

gegeben sind. Aus $\text{tg} \lambda = v/u$ ergibt sich für eine Änderung $d\lambda_0$ der Windrichtung über der Ebene die entsprechende Änderung über dem Bergrücken zu

$$d\lambda = d\lambda_0 \cdot \frac{z_0^2}{a^2 + z_0^2} \cdot \sec^2 \lambda_0 / \left\{1 + \text{tg}^2 \lambda_0 \left(\frac{z_0^2}{a^2 + z_0^2}\right)^2\right\},$$

so daß aus der Häufigkeitsverteilung der Windrichtungen über der Ebene diejenige in der entsprechenden Stromlinienhöhe über dem Hindernis berechnet werden kann. — In ähnlicher Weise wird der Einfluß eines Tals auf Richtung und Stärke des Windes behandelt.

Ertel (Potsdam).

Arakawa, H.: On water waves. Geophys. Mag. 5, 147—162 (1932).

Der Autor diskutiert in Erweiterung seiner früheren Aufsätze „Seiches of Viscous Water“ (vgl. vorst. Referat) und „The Effect of the Atmosphere on Water Waves“ (vgl. vorst. Titel) noch einmal das Problem der freien Oberflächenwellen in einer inkompressiblen, zähen Flüssigkeit, indem hier gleich eingangs Zylinderkoordinaten eingeführt werden. Bei abermaliger Annahme eines kleinen Viskositätskoeffizienten und voller Symmetrie in allen Azimuten wird der Fall divergierender Wellen und unendlicher Tiefe behandelt. Die Erörterung des Einflusses der Atmosphäre ist der früheren konform. Zum Schlusse wird die Lösung des Problems in kartesischen Koordinaten gebracht.

K. Ledersteger (Wien).

Nakano, M.: Die Seiches in gekoppeltes System formenden Buchten. Geophys. Mag. 5, 163—170 (1932).

Auf Grund systematischer Beobachtung der Seiches in 50 Buchten der japanischen Küste weist der Verf. nach, daß die Schwingungen in 2 Nachbarbuchten eine Art gekoppeltes System mit periodischem Amplitudenaustausch bilden. Der mathematischen Behandlung liegt die Annahme zugrunde, daß die zwei benachbarten Buchten rechteckigen Querschnitt gleicher Dimension haben. Für den Energieaustausch wird eine imaginäre Schranke angenommen, die der trennenden Landzunge in einem Abstand gleich der Breite einer Bucht vorgelagert ist. Aus den horizontalen und vertikalen Grundschwingungen in beiden Buchten wird die Gesamtenergie dieses Systems abgeleitet und in die Lagrangesche Bewegungsgleichung eingeführt. Der Ansatz für die Lösung der zwei resultierenden Differentialgleichungen wird für den Fall geringer Koppelung und schließlich unter der speziellen Anfangsbedingung, daß nur in einer Bucht freie Schwingungen existieren, diskutiert.

K. Ledersteger (Wien).

Watanabe, S.: From „conversion of vortex“ to „biogenesis of vortex“. Geophys. Mag. 5, 183—186 (1932).

Die von Fujiwhara (Jap. J. Astron. Geophys. Nr 5, 143) entwickelte Theorie des „Wachstums und Absterbens der Wirbel“ in inkompressiblen Flüssigkeiten wird von Watanabe an Hand des durch die (parallele und transversale) Reibung $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2$ erweiterten Zirkulationssatzes (v = Strömungsgeschwindigkeit, \mathfrak{W} = Drehvektor der Erde)

$$\frac{d}{dt} \oint v_s ds = \oint \{2[v \mathfrak{W}] + \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2\}_s \cdot ds$$

mathematisch schärfer zu begründen versucht.

Ertel (Potsdam).